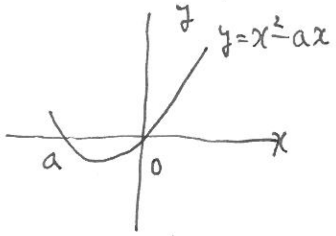
２０１９年　東北大学後期日程試験【　文系数学　】解答例

$\boxed{1}$　$x^2-ax=x(x-a)$

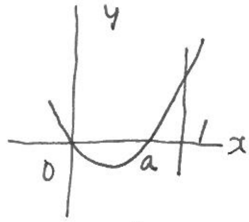
(ア)　$a<0$ のとき



$$(与式)=\int_0^1 (x^2-ax)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}=\frac{1}{3}$$

$a=0$，不適

(イ)　$0\leqq a<1$ のとき

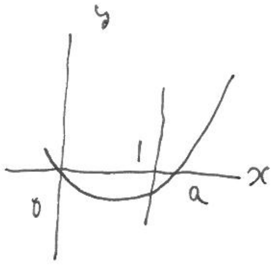


$$(与式)=\int_0^a(-x^2+ax)\,dx+\int_a^1(x^2-ax)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^a+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_a^1$$
$$=\frac{1}{3}a^3-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$\frac{a}{6}(2a^2-3)=0$.　$a=0,\ \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

条件をみたすものは $a=0$

(ウ)　$1\leqq a$ のとき



$$(与式)=\int_0^1(-x^2+ax)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{3}+\frac{a}{2}=\frac{1}{3}$$

$a=\frac{4}{3}$，適

(ア)，(イ)，(ウ)より　$a=0,\ \frac{4}{3}$

$\boxed{2}$

(1) 点Pの座標は (a, b) とおける。Pを通る直線の傾きを m とおくと その式は

$y = m(x-a)+b$ 、これと $y=-\dfrac{x^2}{2}$ が接するとき

$m(x-a)+b = -\dfrac{x^2}{2}$ 、 $\dfrac{x^2}{2}+mx-am+b=0$ …① の判別式 D について

$D = m^2 - 4\cdot\dfrac{1}{2}(-am+b) = m^2+2am-2b=0$

この方程式の解を m_1, m_2 とおくと $l_1 \perp l_2$ より $m_1 m_2 = -2b = -1$ 、 $b=\dfrac{1}{2}$

したがって、 $m^2+2am-1=0$ 、 $m = -a \pm \sqrt{a^2+1}$

傾きについての条件から

l_1 の傾き $-a+\sqrt{a^2+1}$ 　 l_2 の傾き $-a-\sqrt{a^2+1}$

(2) 接点の x 座標は ①の式 ($b=\dfrac{1}{2}$ として) より $x=-m_1, -m_2$

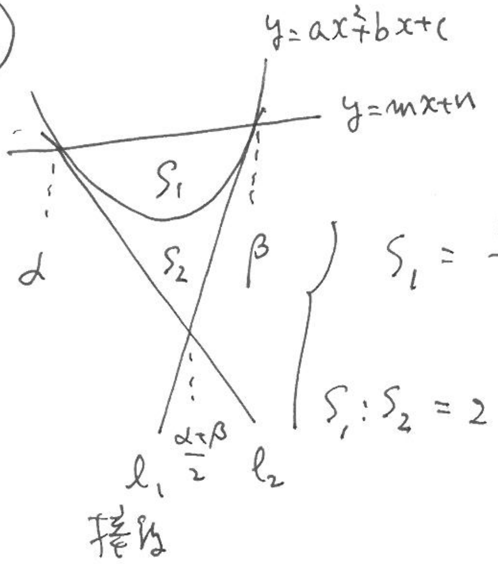
したがって、 Q_1 の x 座標は $a-\sqrt{a^2+1}$ 、 Q_2 の x 座標は $a+\sqrt{a^2+1}$

$\triangle PQ_1Q_2$ の面積は放物線 C と直線 Q_1Q_2 とで囲まれた面積の $\dfrac{3}{2}$ 倍だから

$$\frac{\left|-\frac{1}{2}\right|}{6}\left(a+\sqrt{a^2+1}-a+\sqrt{a^2+1}\right)^3\cdot\frac{3}{2}=8$$

これを解いて $a=\pm\sqrt{3}$ 　点Pの座標は (a, b) より $\left(\pm\sqrt{3}, \dfrac{1}{2}\right)$

注意



$S_1 = \dfrac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$

$S_1 : S_2 = 2:1$

$\boxed{3}$ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく

(1) $\overrightarrow{OP}=t\vec{a}$ $(0\leqq t\leqq 1)$, $\overrightarrow{OQ}=s\vec{b}+(1-s)\vec{c}$ $(0\leqq s\leqq 1)$ とかける

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=-t\vec{a}+s\vec{b}+(1-s)\vec{c}$

$PQ^2=|\overrightarrow{PQ}|^2=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PQ}$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}$ より

$=t^2+s^2-t-s+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

$\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\geqq 0$, $\left(s-\frac{1}{2}\right)^2\geqq 0$ より　$t=s=\frac{1}{2}$のとき最小値をとる.

よって. $\overrightarrow{PQ}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AB}$ $(0\leqq k\leqq 1)$, $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AC}$ とおく. 点Rが線分DE上にあるとき. $\overrightarrow{AR}=u\overrightarrow{AD}+(1-u)\overrightarrow{AE}$ $(0\leqq u\leqq 1)$

これより $\overrightarrow{OR}=uk\vec{b}+(1-u)k\vec{c}+(1-k)\vec{a}$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OR}=\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)\cdot\left(uk\vec{b}+(1-u)k\vec{c}+(1-k)\vec{a}\right\}=\frac{1}{2}k$

$0\leqq k\leqq 1$ より 最大値 $\frac{1}{2}$, Rは線分BC上にある.

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OR}=PQ\cdot OR\cos\theta$ で $|\overrightarrow{PQ}|^2=\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=\frac{1}{2}$ より

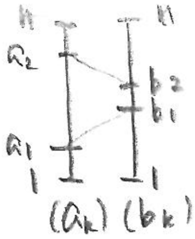
$\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot OR\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq OR\leqq 1$より

$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq\cos\theta\leqq\frac{\sqrt{6}}{3}$

4

(1)(ア) $a_1<b_1\leqq b_2<a_2$

(イ) $b_1<a_1\leqq a_2<b_2$ と分けて考える



(ア)について $n\geqq4$ のとき

① $b_1<b_2$ のもの

${}_nC_4$ とおり

② $b_1=b_2$ のもの

${}_nC_3$ とおり

(イ)も全く同じなので

$$A_{n,2}=2({}_nC_4+{}_nC_3)=\frac{n(n-1)(n-2)(n+1)}{12}$$

$n=1,2$ のとき

$A_{n,2}=0$ は明らかで

$n=3$ のとき

$(a_1,a_2)=(1,3)$, $(b_1,b_2)=(2,2)$

および $(a_1,a_2)=(2,2)$, $(b_1,b_2)=(1,3)$ より

$A_{3,2}=2$

これはいずれも次でまとめられる

$$A_{n,2}=\frac{n(n-1)(n-2)(n+1)}{12}$$ //

(2) (i)〜(iii)をみたすもので

$\{a_k\}\equiv\{b_k\}$ となるものはなく

$\{a_k\}$ と $\{b_k\}$ をすべて入れかえたものも(i)〜(iii)をすべてみたす.

よって必ずペアが出来るので

$A_{n,k}$ は偶数である

(3) (a_1,a_2,a_3) について具体的に条件をみたす (b_1,b_2,b_3) を求める

① 1−1−1 → なし

② 1−1−2 → なし

③ 1−1−3 のとき

1−2−2
2−2−2 の2とおり

④ 1−2−2 のとき

1−1−3 の1とおり

⑤ 1−2−3 のとき

2−2−2 の1とおり

⑥ 1−3−3 のとき

2−2−2
2−2−3 の2とおり

⑦ 2−2−2 のとき

1−1−3
1−2−3
1−3−3 の3とおり

⑧ 2−2−3 のとき

1−3−3 の1とおり

⑨ 2−3−3 のとき → なし

⑩ 3−3−3 → なし

よって

$A_{3,3}=\underline{10}$