２０１９年　東北大学前期日程試験【　理系数学　】解答例

1

$y=\sin x$, $y'=\cos x$

2つの接点の x 座標を α, β とすると、直交条件より

$\cos\alpha\cdot\cos\beta=-1$, で　$-1\leqq\cos x\leqq 1$ より

$\cos\alpha=1$, $\cos\beta=-1$ と考えても一般性を失わない。

したがって　$\alpha=2n\pi$, $\beta=(2m+1)\pi$　(n, m は整数)

とおける。

接線は　$y=\cos\alpha\,(x-\alpha)+\sin\alpha=x-2n\pi$

$y=\cos\beta\,(x-\beta)+\sin\beta=-x+(2m+1)\pi$

これらを連立して解いて

$$x=\frac{(2n+2m+1)\pi}{2},\quad y=\frac{2n+2m+1}{2}\pi-2n\pi$$

$$=\frac{2m-2n+1}{2}\pi$$

$$=\left(l+\frac{1}{2}\right)\pi$$ (l は任意の整数)

© C.A.P.特訓予備校

$\boxed{2}$

(1) 真数条件より　$6<x<12$ —①

(i) $a>1$ のとき

$2\log_a(x-6)>\log_a(12-x)$ —②

$\Leftrightarrow\quad (x-6)^2>12-x$

$\Leftrightarrow\quad x^2-11x+24>0$

$\Leftrightarrow\quad (x-3)(x-8)>0$

$\Leftrightarrow\quad x<3,\ 8<x$

①と合わせ　$x=9,10,11$

(ii) $0<a<1$ のとき　②$\Leftrightarrow (x-6)^2<12-x$

$\Leftrightarrow\quad 3<x<8$

①と合わせ　$x=7$

よって $\begin{cases} a>1 \text{ のとき} & x=9,10,11 \\ 0<a<1 \text{ のとき} & x=7 \end{cases}$

(2) 真数条件より　$n<x<2n$

xは整数であるので　$n+1\leqq x\leqq 2n-1$

(i) $a>1$ のとき

$2\log_a(x-n)>\log_a(2n-x)$

$\Leftrightarrow\quad (x-n)^2-(2n-x)=x^2-(2n-1)x+n^2-2n>0$ —③

ここで $f(x)=x^2-(2n-1)x+n^2-2n$ とおくと

$\frac{2n-1}{2}<n$ より $f(x)$は $n+1\leqq x\leqq 2n-1$ で単調増加であるので

③が解をもつ必要十分条件は $f(2n-1)>0$

$f(2n-1)=n^2-2n>0$ で nは正の整数より $n>2$ すなわち $n\geqq 3$

(ii) $0<a<1$ のとき

$2\log_a(x-n)>\log_a(2n-x)$

$\Leftrightarrow\quad f(x)<0$

これが解をもつ必要十分条件は(i)と同様にして $f(n+1)<0$

$f(n+1)=-n+2<0$ より $n\geqq 3$

よって　$n\geqq 3$

© C.A.P.特訓予備校

２０１９年　東北大学前期日程試験【　理系数学　】解答例

3

(1) $\{x_n\}$ が発散しないと仮定し、$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ とする。

$x_{n+1} = x_n + x_n^2$ より、$\alpha = \alpha + \alpha^2$ ゆえ $\alpha = 0$ ——①

一方、

$x_1 = a > 0$ のとき、$x_{n+1} - x_n = x_n^2 \geqq 0$ ゆえ $x_{n+1} \geqq x_n$

よって、$0 < a = x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ となり、$\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n \geqq a$ ——②

①, ②は矛盾する　よって $\{x_n\}$ は発散する。

(2) $-1 < a < 0$ のとき

$\left|x_1 + \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ であり、

$x_{n+1} + \frac{1}{2} = x_n^2 + x_n + \frac{1}{2} = \left(x_n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ ゆえ

$\left|x_n + \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2} \Rightarrow \left|x_{n+1} + \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ となる。

よって、数学的帰納法により、$\left|x_n + \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ つまり、$-1 < x_n < 0$ となる。

(3)

$x_{n+1} = x_n(x_n+1)$ より

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n(x_n+1)} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n+1}$$

(2)から $0 < |x_n+1| < 1$ より、$\frac{1}{x_n+1} > 1$

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n+1} < \frac{1}{x_n} - 1$$

よって、$\frac{1}{x_{n+1}} < \frac{1}{x_n} - 1 < \frac{1}{x_{n-1}} - 2 < \cdots < \frac{1}{x_1} - n$

となり、

$\frac{1}{x_1} - n \longrightarrow -\infty \quad (n \to \infty)$ ゆえ

$\frac{1}{x_{n+1}} \longrightarrow -\infty \quad (n \to \infty)$ となり、

$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ とわかる。

© C.A.P.特訓予備校

4 (1) $[2x^2+x+3]=[2(x^2+1)+x+1]=x+1$

$[x^5-1]=[(x^2+1)(x^3-x)+x-1]=x-1$

$[(2x^2+x+3)(x^5-1)]=[(x+1)(x-1)]=-2.$

(2) $A(x)=(x^2+1)Q_1(x)+px+q$

$B(x)=(x^2+1)Q_2(x)+rx+s$

とおくと

$A(x)B(x)=(x^2+1)Q(x)+(px+q)(rx+s)$

となるから

$[A(x)B(x)]=[(px+q)(rx+s)]$

$=[[A(x)][B(x)]]$

(3) $[(ax+b)^4]=-1$ より $(ai+b)^4=-1.$

ここで

$ai+b=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$

とおけて

$r^4=1$ $\therefore r=1$ $\therefore a=\sin\theta,\ b=\cos\theta$

このとき (3) より

$[(x\sin\theta+\cos\theta)^4]=[(x\sin 2\theta+\cos 2\theta)^2]$

$=x\sin 4\theta+\cos 4\theta=-1$

$\therefore(\cos 4\theta,\sin 4\theta)=(-1,0)$ $\therefore\theta=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$

$\therefore(a,b)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$（複号任意）

© C.A.P.特訓予備校

5

(1) $\int_0^1 \sin^2(\pi x)dx = \int_0^1 \cos^2(\pi x)dx$,

$\int_0^1 \{\sin^2(\pi x)+\cos^2(\pi x)\}dx = \int_0^1 1dx = 1$

より $\int_0^1 \sin^2(\pi x)dx = \frac{1}{2}$.

$\int_{-1}^1 \frac{e^x}{1+e^x}\sin^2(\pi x)dx$

$= \int_1^{-1} \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}\sin^2(\pi(-t))(-1)dt$

$(x=-t)$

$= \int_{-1}^1 \frac{1}{1+e^t}\sin^2(\pi t)dt$

と

$\int_{-1}^1 \frac{e^x}{1+e^x}\sin^2(\pi x)dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{1+e^x}\sin^2(\pi x)dx$

$= \int_{-1}^1 \sin^2(\pi x)dx = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$

より $\int_{-1}^1 \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx = \frac{1}{2}$.

(2) $f(x) = \frac{1}{1+e^x}\{\sin^2(\pi x)+Ae^x+B\}$

(A, Bは定数)

とおくことができる. まず

$\int_{-1}^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx = \left[\log(1+e^x)\right]_{-1}^1$

$= \log\left(\frac{1+e}{1+e^{-1}}\right) = 1$

$\int_{-1}^1 \frac{e^{2x}dx}{1+e^x} = \int_{-1}^1 \left(e^x - \frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$

$= \left[e^x\right]_{-1}^1 - 1 = e - e^{-1} - 1$

$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+e^x} = \left[x - \log(1+e^x)\right]_{-1}^1$

$= 2-1 = 1$

に注意すると

$A = \int_{-1}^1 f(x)dx$

$= \int_{-1}^1 \left\{\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x} + \frac{Ae^x}{1+e^x} + \frac{B}{1+e^x}\right\}dx$

$= \frac{1}{2} + A + B$

$\therefore\ B = -\frac{1}{2}$.

また

$B = \int_{-1}^1 (1-e^x)f(x)dx$

$= A - \int_{-1}^1 \left\{\frac{e^x\sin^2(\pi x)}{1+e^x} + \frac{Ae^{2x}}{1+e^x} + \frac{Be^x}{1+e^x}\right\}dx$

$= A - \frac{1}{2} - A(e-e^{-1}-1) - B$

$= -\frac{1}{2} + A(-e+e^{-1}+2) - B$

と $B = -\frac{1}{2}$ により

$A = \frac{1}{2(e-e^{-1}-2)}$.

よって

$f(x) = \frac{1}{1+e^x}\left\{\sin^2(\pi x) - \frac{1}{2} + \frac{e^x}{2(e-e^{-1}-2)}\right\}$

© C.A.P.特訓予備校

6 (1) n回目までに取り出した赤玉が2個のとき袋には 赤3 白7 → 白を取り出す確率 $\frac{7}{10}$

〃　1　〃　赤4 白6 → 赤　〃　$\frac{2}{5}$

より、$n+1$ 回目までに取り出した赤玉が2個である確率は

$$p(n+1,2)=\frac{7}{10}p(n,2)+\frac{2}{5}p(n,1)$$

(2) (1)と同様にして $p(n+1,1)=\frac{3}{5}p(n,1)+\frac{1}{2}p(n,0)$ が成り立つ

$p(n,0)$は n回とも白玉を取り出す確率であり、その間 赤・白の個数は変化しないので $p(n,0)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $(n\geqq 0)$

ここで $a_n=p(n,1)$ とおくと、$a_0=0$ で

$$a_{n+1}=\frac{3}{5}a_n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}a_{n+1}=\left(\frac{5}{3}\right)^n a_n+\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^n a_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^k+a_0$$

$$=\frac{\frac{5}{6}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}}{1-\frac{5}{6}}=5\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}$$

よって $p(n,1)=a_n=5\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

(3) $b_n=p(n,2)$ とおくと (1)より

$$b_{n+1}=\frac{7}{10}b_n+\frac{2}{5}a_n=\frac{7}{10}b_n+2\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$\left(\frac{10}{7}\right)^{n+1}b_{n+1}=\left(\frac{10}{7}\right)^n b_n+\frac{20}{7}\left\{\left(\frac{6}{7}\right)^n-\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\}$$

$$\left(\frac{10}{7}\right)^n b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{20}{7}\left\{\left(\frac{6}{7}\right)^{k-1}-\left(\frac{5}{7}\right)^{k-1}\right\}+b_0$$

$b_0=0$より

$$=\frac{20}{7}\left\{\frac{1-\left(\frac{6}{7}\right)^n}{1-\frac{6}{7}}-\frac{1-\left(\frac{5}{7}\right)^n}{1-\frac{5}{7}}\right\}=10-20\left(\frac{6}{7}\right)^n+10\left(\frac{5}{7}\right)^n$$

よって $p(n,2)=b_n=10\left\{\left(\frac{7}{10}\right)^n-2\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

(別解) 赤玉に1〜5, 白玉に6〜10の番号を割り当てる

1番の赤玉のみ取り出されるのは(n回とも1, 6〜10)−(n回とも6〜10)で確率は $\left(\frac{6}{10}\right)^n-\left(\frac{5}{10}\right)^n$

赤の選び方が5通りなので (2) … $5\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

1, 2の赤のみ取り出されるのは(n回1, 2, 6〜10)−(n回1, 6〜10)−(n回2, 6〜10)+(n回6〜10)

赤の選び方 ${}_5C_2=10$通りなので

(3) … $10\left\{\left(\frac{7}{10}\right)^n-2\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

© C.A.P.特訓予備校