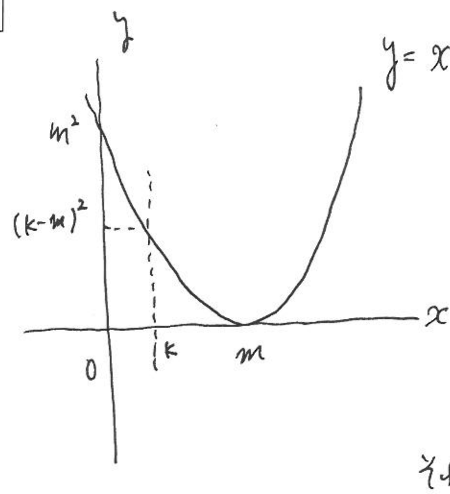
平成３０年　東北大学後期日程試験【　理系数学　】解答例

$\boxed{1}$



$y=x^2-2mx+m^2=(x-m)^2$

(1)　整数Kについて $(K-m)^2$ も整数である…①

y軸上　(0, 0) から (0, m^2) まで　m^2+1 個

x軸上　(0, 0) から (m, 0) まで　$m+1$ 個

放物線上　(0, m^2) から (m, 0) まで　$m+1$ 個

それぞれ格子点はある。共通する点を除いて（重なっている）

$$L_m = m^2+1+m+1+m+1-3 = m^2+2m$$

(2)　①から

$$T_m = \sum_{K=0}^{m}\{(K-m)^2+1\} = m^2+1+\sum_{K=1}^{m}(K^2-2mK+m^2+1)$$

$$= m^2+1+\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)-2m\cdot\frac{m(m+1)}{2}+m^2 m+m$$

$$= \frac{1}{3}m^3+\frac{1}{2}m^2+\frac{7}{6}m+1$$

(3)

$$S_m = \int_0^m (x-m)^2\,dx = \left[\frac{1}{3}(x-m)^3\right]_0^m = \frac{1}{3}m^3$$

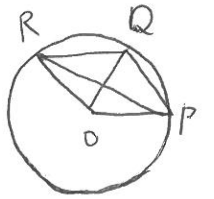
$$\lim_{m\to\infty}\frac{T_m}{S_m} = \lim_{m\to\infty}\frac{\frac{1}{3}m^3+\frac{1}{2}m^2+\frac{7}{6}m+1}{\frac{1}{3}m^3} = 1$$

平成３０年　東北大学後期日程試験【　理系数学　】解答例

2

(1) P, Q, R の順に反時計回りに並んでいるので

(i) $\alpha+\beta \leqq \pi$ のとき $\angle POR = \alpha+\beta$ で

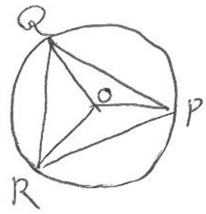


$$\triangle PQR = \triangle POQ + \triangle QOR - \triangle POR$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\,(\sin\angle POQ + \sin\angle QOR - \sin\angle POR)$$

$$= \frac{1}{2}\{\sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha+\beta)\}$$

(ii) $\alpha+\beta > \pi$ のとき $\angle POR = \pi-(\alpha+\beta)$ で



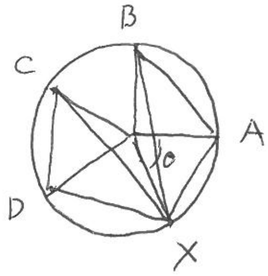
$$\triangle PQR = \triangle POQ + \triangle QOR + \triangle ROP$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\,(\sin\angle POQ + \sin\angle QOR + \sin\angle ROP)$$

$$= \frac{1}{2}\{\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\pi-\alpha-\beta)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{\sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha+\beta)\}$$

(2) $\angle AOX = \theta$ とすると



$$\angle DOX = 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \theta\right)$$

$$= \frac{5}{6}\pi - \theta \qquad \left(0 < \theta < \frac{5}{6}\pi\right)$$

(1)より $\triangle XAB + \triangle XCD = \frac{1}{2}\left\{\sin\theta + \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$

$$+\frac{1}{2}\left\{\sin\frac{\pi}{3} + \sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right) - \sin\left(\frac{7}{6}\pi-\theta\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sin\theta + 1 - \cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\theta + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

よって $\angle AOX = \frac{\pi}{2}$ のとき最大値 $1+\frac{\sqrt{3}}{4}$ をとる

3

(1) 2回共、同じ目が出る場合に限るので

$$\frac{6}{6^2}=\frac{1}{6}$$

(2) 3回の目が{1, 2, 3} または {4, 5, 6} (順不同)

となる場合に限るので、

$$\frac{2\times 3!}{6^3}=\frac{1}{18}$$

(3) 中央がひっくり返る回数で分けて考える

㋐ 0回のとき

{1, 3, 4, 6} が1回ずつ出るときのみなので

$4!=24$ とおり

㋑ 2回のとき

2, 5が1回ずつ出て、残り2回が 2, 5以外の同じ目になればよいので (順不同)

$$4\times\frac{4!}{2!1!1!}=4\times 12=48 \text{ とおり}$$

㋒ 4回のとき

{2, 2, 2, 5} (順不同)

{5, 5, 5, 2} (〃)

となるときのみなので 8とおり

よって

$$\frac{24+48+8}{6^4}=\frac{80}{6\times 6\times 6\times 6}=\frac{5}{81}$$

4

(1) nが奇数のとき $(n \geqq 3)$

$$a_n = a_{n-1}^2 + 2a_{n-1} = (a_{n-1}+1)^2 - 1$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{|a_{n-2}+1|}\right)^2 - 1$$

$$= \frac{1}{4}|a_{n-2}+1| - 1 \quad \text{より}$$

$$a_n + 1 = \frac{1}{4}|a_{n-2}+1|$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}|a_1+1|$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1$　これは$n=1$のときも成り立つ

(2) nが偶数のとき

$$a_n = \frac{1}{2}\sqrt{|a_{n-1}+1|} - 1$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right|} - 1 \quad ((1)\text{より})$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} - 1$$

(3) (1), (2) より　$n \geqq 2$のとき

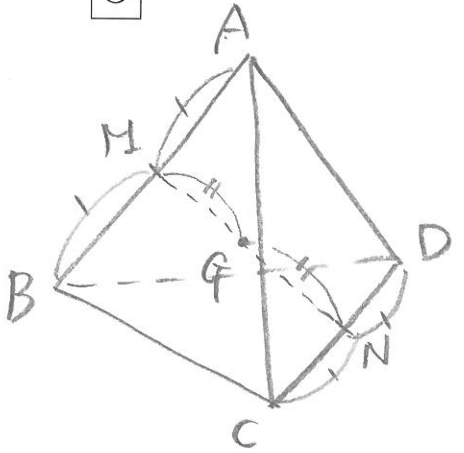
$$0 < a_n + 1 \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

であり, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} = 0$ より

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -1$$

平成３０年　東北大学後期日程試験【　理系数学　】解答例

$\boxed{5}$



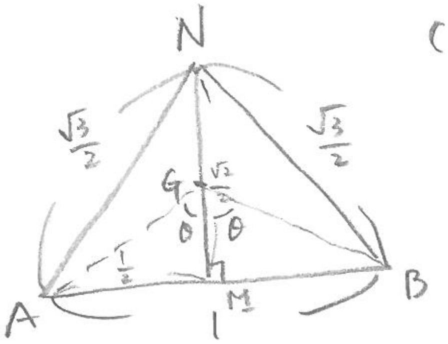
$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}+\dfrac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{2}}{2}$ と変形できるので

辺ABの中点をM，辺CDの中点をNとすると

Gは、線分MNの中点になる。

△ANBにおいて

$AB=1$, $AN=BN=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ゆえ $MN=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



(1) よって

$|\overrightarrow{GA}|^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\dfrac{1}{4}=\dfrac{6}{16}$

$|\overrightarrow{GA}|=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}\times\dfrac{\sqrt{6}}{4}\times\cos\underbrace{\angle BGA}_{2\theta}$

$=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)^2\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{8}$

$\left(\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\quad \cos^2\theta=\dfrac{1}{3},\ \sin^2\theta=\dfrac{2}{3}\right.$ より $\left.\cos 2\theta=-\dfrac{1}{3}\right)$

(2) $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GP}$ より

$$
\begin{array}{rl}
|\overrightarrow{AP}|^2= & |\overrightarrow{AG}|^2+2\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GP}+|\overrightarrow{GP}|^2\\
|\overrightarrow{BP}|^2= & |\overrightarrow{BG}|^2+2\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{GP}+|\overrightarrow{GP}|^2\\
|\overrightarrow{CP}|^2= & |\overrightarrow{CG}|^2+2\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{GP}+|\overrightarrow{GP}|^2\\
+)\ |\overrightarrow{DP}|^2= & |\overrightarrow{DG}|^2+2\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{GP}+|\overrightarrow{GP}|^2\\
\hline
L= & |\overrightarrow{AG}|^2+|\overrightarrow{BG}|^2+|\overrightarrow{CG}|^2+|\overrightarrow{DG}|^2+4|\overrightarrow{GP}|^2
\end{array}
$$

$\left(\because\ \overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DG}=4\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\vec{0}\right)$

（注）(1)より $|\overrightarrow{GA}|=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$
同様には $|\overrightarrow{GB}|=|\overrightarrow{GC}|=|\overrightarrow{GD}|=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

よって、$P=G$ のとき

L は最小値 $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)^2\times 4=\dfrac{3}{2}$ をとる。

最大となるのは、PがA,B,C,Dのいずれかと一致するときで

L は最大値 $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)^2\times 8=3$ をとる。

6

(1) $x=e^t$ とおくと $dx=e^t dt$ $\begin{array}{c|c} x & 1 \to \sqrt{e} \\ \hline t & 0 \to \frac{1}{2} \end{array}$

$$a_n = 2^n \int_0^{\frac{1}{2}} e^t \cdot t^n e^t dt = 2^n \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2t} t^n dt$$

$0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ において $1 \leqq e^{2t} \leqq e$, $t^n \geqq 0$ より

$$2^n \int_0^{\frac{1}{2}} t^n dt \leqq a_n \leqq 2^n \int_0^{\frac{1}{2}} e\, t^n dt$$

$$2^n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}} \leqq a_n \leqq 2^n \left[\frac{e\, t^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2(n+1)} \leqq a_n \leqq \frac{e}{2(n+1)}$$

(2) $a_n = 2^n \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2t} t^n dt$

$$= 2^{n-1}\left[e^{2t} t^n\right]_0^{\frac{1}{2}} - n \cdot 2^{n-1} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2t} t^{n-1} dt$$

$= \frac{e}{2} - n a_{n-1}$ より

$$p_n e + q_n = \frac{e}{2} - n(p_{n-1} e + q_{n-1})$$

$$= \left(\frac{1}{2} - n p_{n-1}\right) e - n q_{n-1}$$

eは無理数, p_n, q_n は有理数より

$$p_n = \frac{1}{2} - n p_{n-1}, \quad q_n = -n q_{n-1}$$

(3) $q_n = -n q_{n-1}$, $a_1 = \frac{e}{2} - \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2t} dt = \frac{e}{2} - \left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$= (-1)^{n-1} n! q_1$ 　　$= \frac{1}{2}$ より $q_1 = \frac{1}{2}$ なので

$$q_n = \frac{(-1)^{n-1} n!}{2}$$

また, $p_n = \frac{a_n - q_n}{e}$ より

$$\frac{(-1)^n p_n}{n!} = \frac{(-1)^n a_n}{n!\, e} + \frac{1}{2e}$$

(1)より $\left|\frac{(-1)^n a_n}{n!\, e}\right| \leqq \frac{1}{2(n+1)!} \longrightarrow 0 \ (n \to \infty)$

したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n p_n}{n!} = \frac{1}{2e}$