

1

$$(1) \quad \vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB} \Rightarrow \begin{cases} x = 3s + t \\ y = s + 2t \end{cases}$$

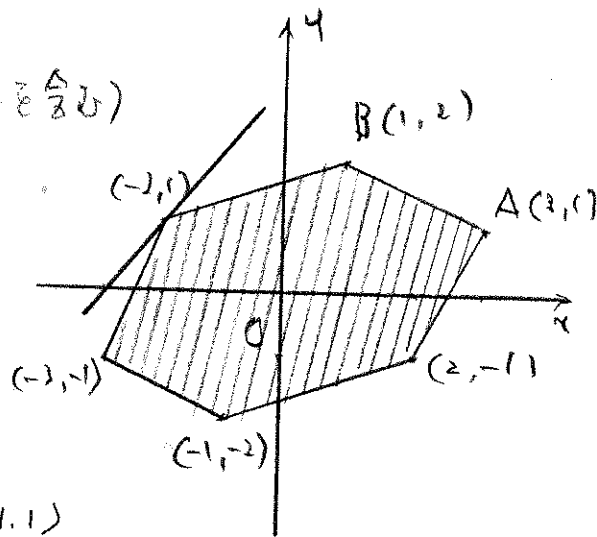
$$\Rightarrow s = \frac{2x - y}{5}, \quad t = \frac{3y - x}{5}$$

$$s, t \quad -1 \leq s \leq 1, \quad -1 \leq t \leq 1, \quad -1 \leq s + t \leq 1 \quad \text{よって } x (?)$$

$$-1 \leq \frac{2x - y}{5} \leq 1, \quad -1 \leq \frac{3y - x}{5} \leq 1, \quad -1 \leq \frac{x + 2y}{5} \leq 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y \leq 5 \leq 2x + y, & \frac{x - y}{2} \leq y \leq \frac{x + y}{2} \\ -x - y \leq y \leq \frac{-x + y}{2} \end{cases}$$

とわかる？、図の斜線部 (境界を含む)



$$(2) \quad \vec{OP} \cdot \vec{OC} = (s(3, 1) + t(1, 2)) \cdot (-1, 1)$$

$$= (3s + t, s + 2t) \cdot (-1, 1)$$

$$= -3s - t + s + 2t$$

$$= -2s + t$$

$$-1 \leq s \leq 1, \quad -1 \leq t \leq 1 \quad \text{より}$$

s が小さく t が大きいほど値は大きい。

$$s = -1, t = 1 \quad \text{より } \underline{\underline{P(-2, 1) \text{ のとき最大値 3}}}$$

2 (1) 対称性より $x \geq 0$ を考えよう

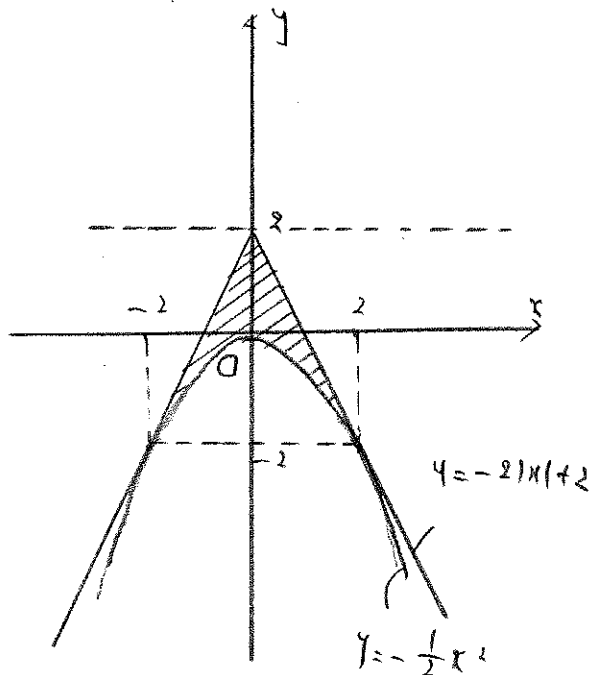
$$y = -\frac{1}{2}x^2, \quad y = -2x + b$$

相接するから

$$y' = -x = -2 \quad \therefore x = 2$$

$x = 2$ 時、接点 $(2, -2)$ となるから

$$b = 2$$



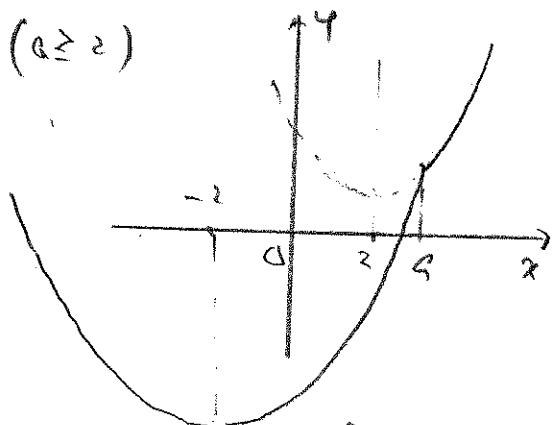
$$(2) \quad -\frac{1}{2}x^2 = -2|x-a| + b$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2|x-a| + b < 0$$

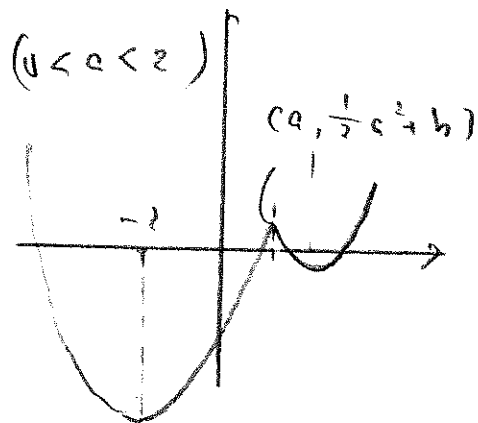
対称性から $a \geq 0$ を考えよう

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2|x-a| + b \quad x < a$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-a)^2 - 2 + 2a + b & (x \geq a) \\ \frac{1}{2}(x+a)^2 - 2 - 2a + b & (x \leq -a) \end{cases}$$



上のグラフより



$$0 < a < 2 \text{ のとき, } \frac{1}{2}a^2 + b > 0, \quad -2 + 2a + b < 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}a^2 < b < -2a + 2 \quad (0 < a < 2)$$

$a \leq 0$ の場合は？ 図より斜線部 (2点分)

(1) (2) より

$$2 \int_0^2 \frac{1}{2}(x-2)^2 dx = \frac{8}{3}$$

3

l, m, n は整数 $0 \leq l \leq 7, 0 \leq m \leq 6, 0 \leq n \leq 4$ とする ... ①

$$7l + 9m + 12n = 54.$$

$n=0$ のとき $7l = 9(6-m)$. 7 と 9 は互いに素より

$6-m$ は 7 の倍数 ... ①より $m=6, l=0$

$n=1$ のとき $9m = 7(6-l)$ 7 と 9 は互いに素より

$6-l$ は 9 の倍数 ①より $l=6, m=0$

$n=2$ のとき $7l = 3(10-3m)$ 7 と 3 は互いに素より

$10-3m$ は 7 の倍数 ①より $m=1, l=3$

$n=3$ のとき $7l = 9(2-m)$ 7 と 9 は互いに素より

$2-m$ は 7 の倍数 ①より $m=2, l=0$

$n=4$ のとき $7l + 9m = 6$ このとき①より 7 の倍数 l, m は

以上から

$$(l, m, n) = (0, 6, 0), (6, 0, 1), (3, 1, 2), (0, 2, 3)$$

4

(1) 四角形 $BCFE$ は

矩形か？

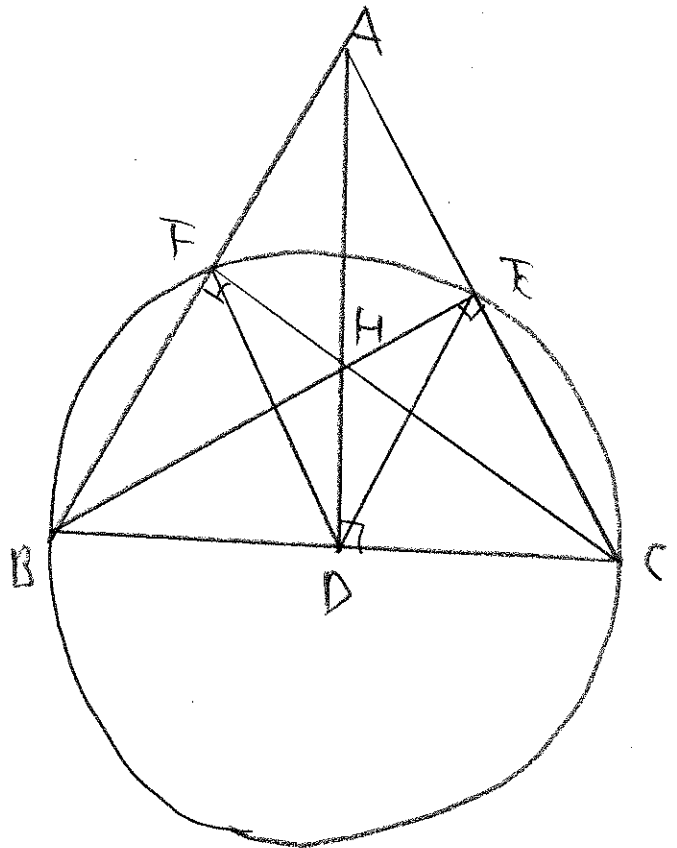
$$\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$$

よって BC を直径とする円に内接する。

四角形 $AFHE$ は矩形か？

$$\angle AEH = \angle AFH = 90^\circ$$

よって AH を直径とする円に内接する。



(2) (1) と同様にして

四角形 $CEHD$ は直径 CH の円

四角形 $BDHF$ は直径 BH の円

に内接する。

$$\therefore \angle CDE = \angle CHE = \angle BHF = \angle BDF.$$

$$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ \text{ の } \therefore$$

$$\angle ADE = \angle ADF.$$