1

与えられた条件から　P (x, y, z) とおくと

$$4(x^2+y^2+z^2)+(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+2\{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2\}$$
$$+3\{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\}=30$$

$$10x^2-(6a+8)x+10y^2-(6b+10)y+10z^2-(6c+14)z+4+3a^2+3b^2+3c^2=0 \cdots\cdots ①$$

x, y, z. それぞれについて 平方完成して. 中心の座標 が M $(1, \frac{1}{2}, 1)$ に なることから

$$\frac{3a+4}{10}=1,\quad \frac{3b+5}{10}=\frac{1}{2},\quad \frac{3c+7}{10}=1$$

これより　$a=2$. $b=0$. $c=1$

これらの値を ① に 代入して 整理して.

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+(z-1)^2=\frac{7}{20}$$

したがって. 球の半径は $\sqrt{\frac{7}{20}}=\frac{\sqrt{35}}{10}$

2

$C_1 : y = x^2$,　$C_2 : y = -x^2 + 2ax - a$.　a：実数.

(1) C_1とC_2の共有点のx座標を求める式は.

$$x^2 = -x^2 + 2ax - a.$$

$$2x^2 - 2ax + a = 0 \quad \cdots\cdots (*)$$

C_1とC_2が共有点をもたないことと, $(*)$が実数解をもたないことは同値である.
$(*)$の判別式をDとすると, $(*)$が実数解をもたないための必要十分条件は, $D<0$となることである.

$$D = (2a)^2 - 4\cdot 2\cdot a = 4a(a-2)$$

よって$D<0$となるのは. $0<a<2$のときであるから, C_1とC_2が共有点をもたないaの範囲は, $\underline{0<a<2}$

(2) $0<a<2$とする. $y=x^2$上の点(t, t^2)における接線lの方程式は, $y'=2x$であるから,

$$y - t^2 = 2t(x-t)$$

$$y = 2tx - t^2$$

となる. この直線lとC_2との共有点のx座標が満たす式は

$$-x^2 + 2ax - a = 2tx - t^2$$

$$x^2 + (2t-2a)x - t^2 + a = 0 \quad \cdots\cdots (**)$$

である. 直線lがC_2に接することと, $(**)$が重解をもつことは同値であって, これと$(**)$の判別式D'が$D'=0$をみたすことは同値である. よって,

$$D' = \{2(t-a)\}^2 - 4\cdot 1\cdot(a-t^2) = 0.$$

$$t^2 - 2at + a^2 - a + t^2 = 0$$

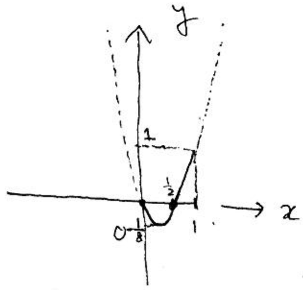
$$2t^2 - 2at + a^2 - a = 0 \quad \cdots\cdots (***)$$

tに関する2次方程式$(***)$は, $(***)$の判別式$D'' = (-2a)^2 - 4\cdot 2\cdot(a^2-a) = -4a(a-2)$が$0<a<2$のとき$D''>0$となることより, $(***)$は異なる2つの実数解をもつ. よって, $0<a<2$のとき, 対応する接点は2つ存在し, これらは相異なる. したがって, $0<a<2$のとき, C_1とC_2の両方に接する直線は2本存在する.

(3) $0<a<2$とする. (2)より, $y=x^2$上の点(t, t^2)における接線$y=2tx-t^2$がC_2に接するためには,

$$2t^2 - 2at + a^2 - a = 0 \quad \cdots\cdots (***)$$

をみたすことが必要かつ十分である. tに関する2次方程式$(***)$の2つの解をα, βとする$(\beta>\alpha)$.
このとき, (α, α^2), (β, β^2)における$y=x^2$の接線は, それぞれ$y=2\alpha x-\alpha^2$, $y=2\beta x-\beta^2$であって, これらの交点Pは, $\alpha \neq \beta$であることから, $P\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha\beta\right)$となる. $\alpha+\beta = -\frac{-2a}{2} = a$, $\alpha\beta = \frac{a^2-a}{2}$であるから, $P\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2-a}{2}\right)$となる. $x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{a^2-a}{2}$としたとき, $y=2x^2-x$となる.
$0<a<2$であったから, $0<x<1$となり, 求める点Pの軌跡は$y=2x^2-x$の$0<x<1$の部分である. ゆえに求める交点の描く図形は下図の点線を除く部分である.



平成２７年　東北大学後期日程試験【数学·文系】解答例

$\boxed{3}$

積 ab（cd）の表

b(d) \ a(c)	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

(1) 左の表より

$ab+cd=6$ となるのは

$ab=1,\ cd=5$

$ab=2,\ cd=4$

$ab=3,\ cd=3$

の組が考えられ、その値が逆の場合を考えに入れて、

確率は

$$\left(\frac{1}{36}\times\frac{2}{36}+\frac{2}{36}\times\frac{3}{36}\right)\times 2+\frac{2}{36}\times\frac{2}{36}$$

$$=\frac{20}{1296}=\frac{5}{324}$$

(2) $ad-bc=1$ の場合 (1)と同様にする。

$ad=2,\ cd=1$

$ad=3,\ cd=2$

$ad=4,\ cd=3$

$ad=5,\ cd=4$

$ad=6,\ cd=5$

$ad=9,\ cd=8$

$ad=10,\ cd=9$

$ad=16,\ cd=15$

$ad=25,\ cd=24$

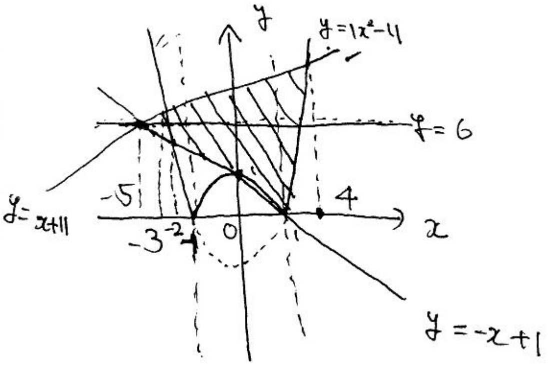
の9組考えられる。

$$\frac{2}{36}\times\frac{1}{36}+\frac{2}{36}\times\frac{2}{36}+\frac{3}{36}\times\frac{2}{36}$$
$$+\frac{2}{36}\times\frac{3}{36}+\frac{4}{36}\times\frac{2}{36}+\frac{1}{36}\times\frac{2}{36}$$
$$+\frac{2}{36}\times\frac{1}{36}+\frac{1}{36}\times\frac{2}{36}+\frac{1}{36}\times\frac{2}{36}$$
$$=\frac{34}{1296}=\frac{17}{648}$$

$\boxed{4}$

$D=\{(x,y) \mid y \geqq |x^2-1|,\ x \geqq |y-6|-5\}$.

(1) $x^2-1 \geqq 0$ のとき，すなわち，$x \leqq -1$，$1 \leqq x$ のとき，$y \geqq x^2-1$.
$x^2-1<0$ のとき，すなわち，$-1<x<1$ のとき，$y \geqq -x^2+1$.
$y-6 \geqq 0$ のとき，すなわち，$y \geqq 6$ のとき，$x \geqq y-11$.　$(y \leqq x+11)$
$y-6<0$ のとき，すなわち，$y<6$ のとき，$x \geqq -y+1$　$(y \geqq -x+1)$
よって，領域 D は以下の図の斜線部分であり，境界線上の点を含む.



(注) $y=x^2-1$ と $y=x+11$ との交点は
$x^2-1=x+11$
$x^2-x-12=0$
$(x-4)(x+3)=0$
$\therefore\ (-3,8),\ (4,15)$
$y=x^2-1$ と $y=-x+1$ との交点は，
$x^2-1=-x+1$
$x^2+x-2=0$
$(x+2)(x-1)=0$.
$\therefore\ (-2,3),\ (1,0)$

$y=-x^2+1$ と $y=-x+1$ との交点は，
$-x^2+1=-x+1$
$\therefore\ x(x-1)=0$
$\therefore\ (0,1),\ (1,0)$.

(2) 領域 D の面積は，$y=x^2-1$ と $y=x+11$ で囲まれた部分の面積 S_1 から，$y=x^2-1$ と $y=-x+1$ で囲まれた部分の面積 S_2 と $y=-x^2+1$ と $y=-x+1$ で囲まれた部分の面積 S_3 を引いたものである. よって．

$$S_1-S_2-S_3$$
$$=\int_{-3}^{4}\{x+11-(x^2-1)\}\,dx-\int_{-2}^{1}\{-x+1-(x^2-1)\}\,dx-\int_{0}^{1}\{-x^2+1-(-x+1)\}\,dx.$$
$$=\frac{1}{6}\{4-(-3)\}^3-\frac{1}{6}\{1-(-2)\}^3-\frac{1}{6}(1-0)^3=\frac{315}{6}=\underline{\underline{\frac{105}{2}}}.$$

（$a<0$ のとき，$\beta>\alpha$ について $\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$ となることを認めた）.