1

(1)

$$a_n^2-2a_na_{n+1}+a_{n+1}^2=3(a_n+a_{n+1})$$

$$-)\quad a_{n+1}^2-2a_{n+1}a_{n+2}+a_{n+2}^2=3(a_{n+1}+a_{n+2})$$

$$a_n^2-a_{n+2}^2-2a_{n+1}(a_n-a_{n+2})=3(a_n-a_{n+2})$$

$a_n-a_{n+2}\neq 0$ より

$$a_n+a_{n+2}-2a_{n+1}=3$$

$$\therefore\ a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}+3$$

(2) (1)より $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n+3$

$$b_{n+1}=b_n+3$$

n

$$b_n=b_1+3(n-1)$$

$a_1=3,\ a_1^2-2a_1a_2+a_2^2=3(a_1+a_2)$ より　$a_2=9$　$(a_2>a_1)$

$$b_1=a_2-a_1=9-3=6$$

$$b_n=6+3(n-1)=3n+3$$

(3) $b_n=a_{n+1}-a_n=3n+3$

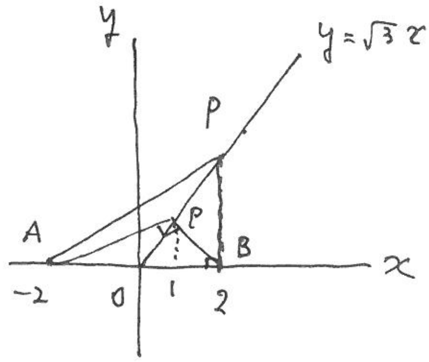
$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k+3)=3+\frac{3}{2}(n-1)n+3(n-1)$

$$=\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n$$

これは $a_1=3$ をみたす.

$$a_n=\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n$$

2



(1) $AP^2 = (t+2)^2 + (\sqrt{3}t-0)^2$

$BP^2 = (t-2)^2 + (\sqrt{3}t-0)^2$

$AB^2 = 16$

$\angle APB = 90^\circ$ のとき　$16 = (t+2)^2 + (\sqrt{3}t-0)^2 + (t-2)^2 + (\sqrt{3}t-0)^2$

$8t^2 = 16-8$　$t>0$ より　$t=1$

$\angle ABP = 90^\circ$ のとき　$t=2$　, $\angle BAP = 90^\circ$ となることはない。

$0<t<1$ のとき　$\angle APB > 90^\circ$,

$2<t$ のとき　$\angle ABP > 90^\circ$

$1<t<2$ のとき　鋭角三角形となる

(2) 直線APの傾きは $\dfrac{\sqrt{3}t}{t+2}$　, Bから対辺に下ろした垂線の方程式は

$y = \dfrac{-(t+2)}{\sqrt{3}t}(x-2)$ … ①　, 点Pから対辺に下ろした垂線の方程式は $x=t$ … ②

①, ②より　垂心 $\left(t, \dfrac{(t+2)(2-t)}{\sqrt{3}t}\right)$

(3) 頂点から△MQRに下ろした垂線の足は(2)の垂心だから, 体積は

$$\frac{1}{3}\left(4\cdot\sqrt{3}t\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2 - \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{(t+2)(t-2)}{\sqrt{3}t}\right\}^2}$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{-4\left(t^2-\frac{5}{2}\right)^2+9}$$

$1<t<2$ より　$t = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2}$ をとる

※等面四面体の各辺の長さを a, b, c とすると体積は

$$\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}$$

$\boxed{3}$

$2p_1x^2+p_2x+2p_3=0$ ・・・・(*)

(1) 判別式をDとすると，(*)が実解をもつためには，$D\geqq 0$であることが必要かつ十分である．

$$D=p_2^2-16p_1p_3\geqq 0$$

となるのは，

$p_2=4,5$のとき，$(p_1,p_3)=(1,1)$のみ．

$p_2=6$のとき，$(p_1,p_3)=(1,1),(1,2),(2,1)$．

全事象は6^3通りあるから求める確率は．

$$\frac{5}{6^3}=\frac{5}{216}$$

(2) (*)が実数でない複素数解 α,β をもつためには，$D<0$であることが必要かつ十分

また $\alpha\beta=1$となるとき，解の公式より

$$\alpha\beta=\frac{p_2^2+(-D)}{16p_1^2}=1$$

∴ $p_2^2-(p_2^2-16p_1p_3)=16p_1^2$

∴ $p_1=p_3$ （$p_1>0$より）

… $p_1=p_3=1$のとき，$D<0$となるのは $p_2=1,2,3$ ・・・ 3通り

$p_1=p_3\geqq 2$のとき，〃 $p_2=1,2,\cdots,6$ ・・・ 30通り

以上から，求める確率は

$$\frac{33}{216}=\frac{11}{72}$$

4

$a>0$, $f(t)=-4t^3+(a+3)t$, $M(a)$: $0\leqq t\leqq 1$ における $f(t)$ の max.

(1) $f'(t)=-12t^2+(a+3)=-12\left(t+\sqrt{\frac{a+3}{12}}\right)\left(t-\sqrt{\frac{a+3}{12}}\right)$ となるから、

$a>0$ に注意すると、$t=\sqrt{\frac{a+3}{12}}$ において極小値をとる。

(i) $\sqrt{\frac{a+3}{12}}\geqq 1$ のとき、すなわち $a\geqq 9$ のとき、

$$M(a)=f(1)=a-1.$$

(i)

(ii) $\sqrt{\frac{a+3}{12}}<1$ のとき、すなわち、$0<a<9$ のとき.

$$M(a)=f\left(\sqrt{\frac{a+3}{12}}\right)=\left(\frac{a+3}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

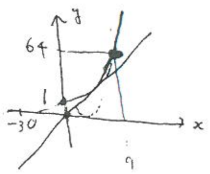
(ii)

以上から

$$M(a)=\begin{cases} a-1, & a\geqq 9 \\ \left(\frac{a+3}{3}\right)^{\frac{3}{2}}, & 0<a<9. \end{cases}$$

(2). $x>0$, $g(x)=M(x)^2$ とする.

$$g(x)=\begin{cases} (x-1)^2, & x\geqq 9 \\ \left(\frac{x+3}{3}\right)^3, & 0<x<9 \end{cases}$$



g は $x=9$ で微分可能であることに注意する.

$$g'(x)=\begin{cases} 2(x-1), & x\geqq 9 \\ \left(\frac{x+3}{3}\right)^2, & 0<x<9 \end{cases}$$

であって、$s>0$ の $(s,g(s))$ における $y=g(x)$ の接線は. $s\geqq 9$ のとき、

$$y-(s-1)^2=2(s-1)(x-s).$$

これが原点を通るとき、$s^2=1$ となるが、$s\geqq 9$ をみたさない. $0<s<9$ のとき.

$$y-\left(\frac{s+3}{3}\right)^3=\left(\frac{s+3}{3}\right)^2(x-s)$$

これが原点を通るとき、$(s+3)^2(3-2s)=0$ より $s=\frac{3}{2}$ となり、$0<s<9$ をみたす. よって、$s=\frac{3}{2}$, そのときの傾きは $\frac{9}{4}$.

(3) $a>0$ のとき, $M(a)>0$, $\sqrt{a}>0$ であるから

$\frac{M(a)}{\sqrt{a}}>0$ $(a>0)$ である. よって最小値が存在するとすれば

その値 m は正である. これより, $\frac{M(a)^2}{a}\geqq m^2$ と $\frac{M(a)}{\sqrt{a}}\geqq m$ は同値である. すべての $0<a<9$ において,

$$M(a)^2-la\geqq 0 \quad \left(\Leftrightarrow \frac{M(a)^2}{a}\geqq l\right)$$

となるための $l>0$ の条件は, (2) より, $0<l\leqq\frac{9}{4}$ である.

$0<l<\frac{9}{4}$ のとき, (2) より $M(a)^2-la>0$ がすべての $0<a<9$ において成立し, $l>\frac{9}{4}$ のとき, (2) より

$$M(a)^2-la<0$$

となる $0<a<9$ が少なくとも一つ存在する.

よって, すべての $0<a<9$ について, $\frac{M(a)^2}{a}\geqq l$ が成立し,

$\frac{M(a)^2}{a}=l$ となる $0<a<9$ が存在する $l>0$ のうち,

最大の l は $l=\frac{9}{4}$ である.

したがって,

$$\frac{M(a)^2}{a}\geqq\frac{9}{4} \text{ すなわち } \frac{M(a)}{\sqrt{a}}\geqq\frac{3}{2}.$$

がすべての $0<a<9$ について成立し, $\frac{M(a)}{\sqrt{a}}=\frac{3}{2}$ となる a は $a=\frac{3}{2}$ である ((2) より). ゆえに $\frac{M(a)}{\sqrt{a}}$ の $0<a<9$ における最小値は $\frac{3}{2}$ であり, そのときの a の値は $a=\frac{3}{2}$ である.

$a\geqq 9$ のとき, $9\leqq a_1<a_2$ について, $\frac{M(a_1)}{\sqrt{a_1}}<\frac{M(a_2)}{\sqrt{a_2}}$ が成立することより. $a\geqq 9$ における $\frac{M(a)}{\sqrt{a}}$ の最小値は $a=9$ のとき, $\frac{8}{3}$ である.

以上から $a>0$ における $\frac{M(a)}{\sqrt{a}}$ の最小値は $\frac{3}{2}$ であり, そのときの a の値は $a=\frac{3}{2}$ である.

4

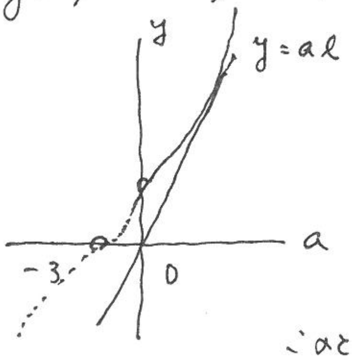
(3) 別解

(3) $0<a<9$ のとき

$$\frac{M(a)}{\sqrt{a}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{(a+3)^3}{a}}$$

$\dfrac{(a+3)^3}{a} = l$ とおくと $(a+3)^3 = al$

$g(a) = (a+3)^3$ とおく. $g'(a) = 3(a+3)^2$



$y = g(a)$ 上の点 (p, q) での接線は

$y = 3(p+3)^2(x-p)+q$

これが原点を通るとき $p = \frac{3}{2}$

このとき l が最小となる.

$$K = \frac{M(\frac{3}{2})}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}+3\right)^3} = \frac{3}{2} \qquad \left(a=\frac{3}{2}\right)$$