２０２４年　東北大学前期日程試験【　理系数学　】解答例

$\boxed{1}$　(文系 $\boxed{1}$ と同じ)

２０２４年　東北大学前期日程試験【　理系数学　】解答例

2

(1) $2\log_t(x+1) = 2\log_t x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ から

$$x+1-2\log_t(x+1) = x+1-2\left\{\log_t x+\log_t\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\}$$

$$= (x-2\log_t x)+1-2\log_t\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdots(*)$$

ここで，条件 (a) と $t>1$ より

$$0<\frac{1}{x}<\sqrt{t}-1 \quad \therefore 1<1+\frac{1}{x}<\sqrt{t}$$

$$\therefore 2\log_t 1<2\log_t\left(1+\frac{1}{x}\right)<2\log_t\sqrt{t}$$

$$\therefore 0<2\log_t\left(1+\frac{1}{x}\right)<1 \quad \therefore 1-2\log_t\left(1+\frac{1}{x}\right)>0$$

よって，条件 (b) とあわせて，$(*)$ は正となる。　$\cdots\cdots$ (証明終)

(2) (1) において $t=2$ とすると，条件 (a) は

$$x>\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$

となり，$x \geqq 3$ で条件 (a) は成り立つ。また，$t=2,\ x=5$ のとき

$$5-2\log_2 5=\log_2 2^5-\log_2 5^2=\log_2\frac{32}{25}>0$$

となり，条件 (b) を満たす。よって (1) から，$6>2\log_2 6$ が成り立つ。
これを繰り返して，5 以上の整数 n に対して $n>2\log_2 n$ が成り立つから，
$n=1,\ 2,\ 3,\ 4$ を調べればよい。順に代入して

$$1>2\log_2 1,\ 2=2\log_2 2,$$
$$3=\log_2 2^3<\log_2 3^2=2\log_2 3,\ 4=2\log_2 4$$

以上から，$n=2,\ 3,\ 4$ である。　$\cdots\cdots$ (答)

２０２４年　東北大学前期日程試験【　理系数学　】解答例

3

(1) $p_2=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9},\ q_2=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9},\ r_2=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

$p_{n+1}=q_n\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}q_n$

$q_{n+1}=r_n\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}r_n$

$r_{n+1}=p_n\times\frac{1}{3}+q_n\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(p_n+q_n)$　……(答)

(2) $p_{n+1}+2q_{n+1}+2r_{n+1}=\frac{2}{3}q_n+\frac{4}{3}r_n+\frac{2}{3}(p_n+q_n)=\frac{2}{3}(p_n+2q_n+2r_n)$

$p_2+2q_2+2r_2=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=\frac{4}{3}$ より，

$p_n+2q_n+2r_n=\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}=2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ $(n\geqq 2)$ となる。　……(答)

(3) $p_{n+1}+iq_{n+1}-(1+i)r_{n+1}=\frac{2}{3}q_n+\frac{2}{3}r_ni-(1+i)\times\frac{1}{3}(p_n+q_n)$

$=-\frac{1}{3}(1+i)p_n+\frac{1}{3}(1-i)q_n+\frac{2}{3}ir_n=-\frac{1}{3}(1+i)\{p_n+iq_n-(1+i)r_n\}$

$p_2+iq_2-(1+i)r_2=\frac{4}{9}+\frac{2}{9}i-\frac{2}{9}(1+i)=\frac{2}{9}$

よって，$p_n+iq_n-(1+i)r_n=\frac{2}{9}\left\{-\frac{1}{3}(1+i)\right\}^{n-2}$ $(n\geqq 2)$ となる。　……(答)

(4) $p_n=r_n$ のとき，$p_n+iq_n-(1+i)r_n=i(q_n-r_n)$ となり，実部 $=0$ となる。

(3) と $1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ より

$p_n+iq_n-(1+i)r_n=\frac{2}{9}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n-2}\left(\cos\frac{n-2}{4}\pi+i\sin\frac{n-2}{4}\pi\right)$ において

$\cos\frac{n-2}{4}\pi=0$ となればよいので，$n=4k$(k は自然数) となる。

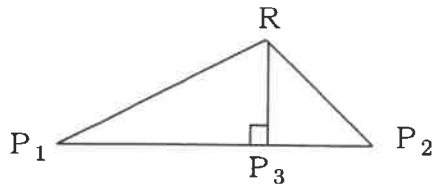
このとき逆も成り立つ。

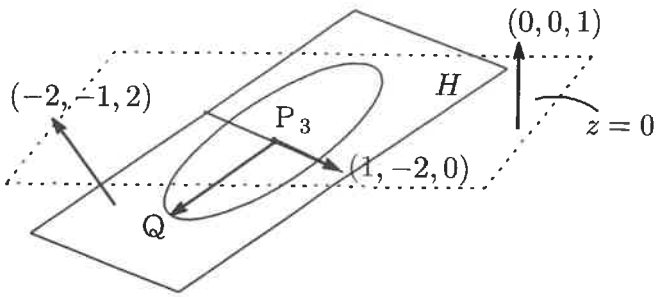
よって，必要十分条件は $n=4k$(k は自然数) である。　……(答)

２０２４年　東北大学前期日程試験【　理系数学　】解答例

4

（図１）





(1) $P_1(3,\ -1,\ 1)$, $P_2(5,\ 0,\ -1)$ より

$$P_1P_2=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=3 \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(2) (1) より，球面 S_1，S_2 の半径の和，半径の差と P_1P_2 の大小は

$$\sqrt{5}-\sqrt{2}<3<\sqrt{5}+\sqrt{2}$$

となるから，S_1 と S_2 は交わりをもつ。

次に，C 上の点 R をとると，(図 1) のようになる。

$\angle RP_1P_2=\theta$ とおくと，余弦定理から

$$\cos\theta=\frac{9+5-2}{2\cdot 3\cdot\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}} \quad \therefore\ P_1P_3=\sqrt{5}\cos\theta=2$$

よって，P_3 は P_1P_2 を $2:1$ に内分する点である。

$$\overrightarrow{OP_3}=\frac{1}{3}(3,\ -1,\ 1)+\frac{2}{3}(5,\ 0,\ -1)=\left(\frac{13}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$$

また，半径は P_3R であり

$$P_3R=\sqrt{5}\sin\theta=1$$

以上から，半径は 1，$P_3\left(\frac{13}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$ である。　$\cdots\cdots$ (答)

(3) 球面 S_1，S_2 の方程式は，それぞれ

$$(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=5$$
$$(x-5)^2+y^2+(z+1)^2=2$$

であり，平面 H の方程式は，2 式を辺々引いて

$$4x+2y-4z=18 \quad \therefore 2x+y-2z=9$$

よって，2 つのベクトル $(0,\ 0,\ 1)$，$(2,\ 1,\ -2)$ に垂直な単位ベクトルが求められるものである。

$(a,\ b,\ c)$ とおくと

$$c=0,\ 2a+b-2c=0,\ a^2+b^2+c^2=1$$

これを解いて，$\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(1,\ -2,\ 0)$ である。　$\cdots\cdots$ (答)

4

(4) (2) より P_3 の z 成分が負であることから，d が最大になる点 Q に対して

$\overrightarrow{P_3Q}$ は，(3) のベクトルに垂直な単位ベクトルでかつ z 成分が負である。

$\overrightarrow{P_3Q}=(p,\ q,\ r)$ とおくと

$$2p+q-2r=0,\ p-2q=0,\ p^2+q^2+r^2=1,\ r<0$$

これを解いて，$\overrightarrow{P_3Q}=-\dfrac{1}{3\sqrt{5}}(4,\ 2,\ 5)$ である。

$$\therefore\ \overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP_3}+\overrightarrow{P_3Q}=\left(\frac{13}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3\sqrt{5}}(4,\ 2,\ 5)$$

$$=\left(\frac{65-4\sqrt{5}}{15},\ \frac{-5-2\sqrt{5}}{15},\ \frac{-1-\sqrt{5}}{3}\right)$$

このとき，d の最大値は $\dfrac{1+\sqrt{5}}{3}$ である。　……(答)

２０２４年　東北大学前期日程試験【　理系数学　】解答例

5

(1) $f(x)=\dfrac{\log(2x-3)}{x}$ より，

$$f'(x)=\frac{\dfrac{2}{2x-3}\times x-\log(2x-3)}{x^2}=\frac{2x-(2x-3)\log(2x-3)}{x^2(2x-3)}$$

よって，$g(x)=2x-(2x-3)\log(2x-3)$　$(x\geqq 2)$ となる。　……(答)

(2) $g'(x)=2-\left\{2\log(2x-3)+(2x-3)\times\dfrac{2}{2x-3}\right\}=-2\log(2x-3)\leqq 0\ (x\geqq 2)$

よって，$g(x)$ は $x\geqq 2$ で減少関数であり，$g(2)=4$

また，$g(x)=2x\left\{1-\dfrac{2x-3}{2x}\log(2x-3)\right\}$ より，

十分大きい x で $g(x)<0$ となるのは明らかである。

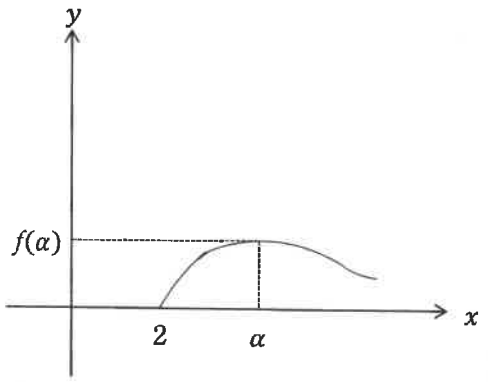
よって，$g(\alpha)=0(\alpha>2)$ となる α がただ１つ存在する。　……(証明終)

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x}\times\frac{\log(2x-3)}{2x-3}=0$ であり，

$f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2(2x-3)}$ より $f'(\alpha)=0$ となるので，増減表は次の通り。

x	2	$\cdots$	α	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

グラフは $f'(2)=1$ に注意して描くと下の通り。



……(答)

5

(4) $(2m-3)^n=(2n-3)^m(2 \leqq m<n)$ より，$n\log(2m-3)=m\log(2n-3)$

つまり，$\dfrac{\log(2m-3)}{m}=\dfrac{\log(2n-3)}{n}$ となる m，n を求めればよい。

$m=2$ のときは，$\dfrac{\log(2m-3)}{m}=0$ となるので $2n-3=1$ つまり $n=2$ となり不適

$m=3$ のときは，$\dfrac{\log 3}{3}=\dfrac{\log(2n-3)}{n}$ より $n=6$ となる。

このことと (3) より，$3<\alpha<6$ とわかり，あとは $m=4$，5 について調べればよい。

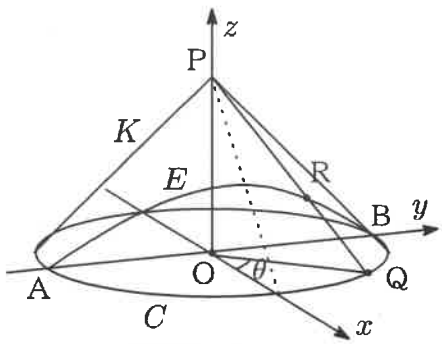
$m=4$ のときは $\dfrac{\log 5}{4}=\dfrac{\log(2n-3)}{n}$ となる $4<n<6$ を満たす n はない。

$m=5$ でも同様である。

よって，条件を満たす m，n は $m=3$，$n=6$ のみである。　……(答)

２０２４年　東北大学前期日程試験【　理系数学　】解答例

6



(1) 直線 PQ の方程式は

$$(x,\ y,\ z) = (0,\ 0,\ 1) + t(\cos\theta,\ \sin\theta,\ -1)$$

$z = x$ に代入して

$$1 - t = t\cos\theta \quad \therefore\ t = \frac{1}{1+\cos\theta}\ \left(\because\ -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{PR}} = \left(\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta},\ \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta},\ -\frac{1}{1+\cos\theta}\right)$$

$$\therefore\ r(\theta) = \mathrm{PR} = \sqrt{\frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta + 1}{(1+\cos\theta)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{1+\cos\theta} \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(2) $\mathrm{Q}'(\cos(\theta+h),\ \sin(\theta+h), 0)$ とし，PQ' と E の交点を R' とおく。

また，弧 QQ' の長さが h だから $\angle\mathrm{QPQ}' = \dfrac{h}{\sqrt{2}}$ となる。

$0 \leqq \theta < \theta + h \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より，

$r(\theta)$ は増加関数だから，$S(\theta+h) - S(\theta)$ の面積は

$$\text{中心角 } \frac{h}{\sqrt{2}},\ \text{半径 PR の扇形の面積：} \frac{1}{2}r(\theta)^2\frac{h}{\sqrt{2}}$$

より大きく

$$\text{中心角 } \frac{h}{\sqrt{2}},\ \text{半径 PR}' \text{ の扇形の面積：} \frac{1}{2}r(\theta+h)^2\frac{h}{\sqrt{2}}$$

より小さい。よって，

$$\frac{1}{2}r(\theta)^2\frac{h}{\sqrt{2}} < S(\theta+h) - S(\theta) < \frac{1}{2}r(\theta+h)^2\frac{h}{\sqrt{2}}$$

が成り立つ。

$$\therefore\ \frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq S(\theta+h) - S(\theta) \leqq \frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}} \cdots ① \quad \cdots\cdots \text{(証明終)}$$

6

(3) $0 \leqq \theta + h < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のときも同様に考えて

$$\frac{-h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq S(\theta) - S(\theta+h) \leqq \frac{-h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ \frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq S(\theta+h) - S(\theta) \leqq \frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}} \cdots ②$$

よって，①，②より

$$S'(\theta) = \lim_{h \to 0} \frac{S(\theta+h) - S(\theta)}{h} = \frac{r(\theta)^2}{2\sqrt{2}}$$

扇形 OAB の面積は，$\pi(\sqrt{2})^2 \cdot \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}\pi} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ だから

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{1+\cos\theta}\right)^2 d\theta$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+\cos\theta)^2} d\theta$$

ここで，$\tan\dfrac{\theta}{2} = u$ とおくと

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}} \quad \therefore \frac{d\theta}{du} = 2\cos^2\frac{\theta}{2}, \qquad \begin{array}{c|c} \theta & 0 \longrightarrow \frac{\pi}{2} \\ \hline u & 0 \longrightarrow 1 \end{array}$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+\cos\theta)^2} d\theta = \int_0^1 \frac{1}{(1+\cos\theta)^2} \cdot 2\cos^2\frac{\theta}{2} du$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}} du = \frac{1}{2}\int_0^1 (1+u^2) du$$

$$= \frac{1}{2}\left[u + \frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

以上から，$T = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}} - \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ である。　　……(答)