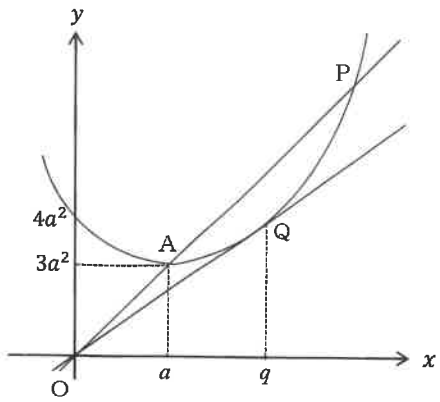
# ２０２４年　東北大学前期日程試験【　文系数学　】解答例

## 1




(1) $f(x)=(x-a)^2+3a^2$ より $\mathrm{A}(a,\ 3a^2)$

直線 OA : $y=3ax$

この直線と $y=f(x)$ の交点の $x$ 座標は

$f(x)=3ax$ を満たす。

$f(x)-3ax=(x-a)(x-4a)=0$

条件から $\mathrm{P}(4a,\ f(4a))$　つまり，$p=4a$　…… (答)

点 Q での接線は $y=f'(q)(x-q)+f(q)$

これが原点を通ることから $0=f'(q)(0-q)+f(q)$

$$=4a^2-q^2$$

$q>0$ より　$q=2a$　…… (答)

$a>0$ なので，$2a<4a$　つまり $p>q$　…… (証明終)

(2) P から $x$ 軸へ下ろした垂線の足を H とする。

Q から $x$ 軸へ下ろして垂線の足を L とする。

$$S=(\triangle\mathrm{OPH}\text{ の面積})-(\triangle\mathrm{OQL}\text{ の面積})-\int_q^p(x^2-2ax+4a^2)dx$$

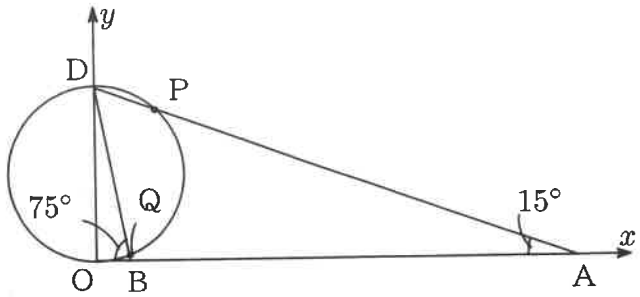
$$=\frac{1}{2}\cdot 4a\cdot 12a^2-\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 4a^2-\int_{2a}^{4a}(x^2-2ax+4a^2)dx$$

$$=20a^3-\left[\frac{1}{3}x^3-ax^2+4a^2x\right]_{2a}^{4a}=\frac{16}{3}a^3 \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(3) (2) より　$\dfrac{16}{3}a^3=\dfrac{2}{3}$ より，$a=\dfrac{1}{2}$　…… (答)

# ２０２４年　東北大学前期日程試験【　文系数学　】解答例

## 2




(1) $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ より

$$\tan 75^\circ = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \cdot \tan 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2} = 2 + \sqrt{3} \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(2) $\angle \mathrm{ODA} = 75^\circ$ より

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OD}\tan 75^\circ = (2+\sqrt{3})d,$$

$$\mathrm{OB} = \frac{\mathrm{OD}}{\tan 75^\circ} = \frac{d}{2+\sqrt{3}} = (2-\sqrt{3})d$$

よって，$\mathrm{AB} = 6$ のとき

$$(2+\sqrt{3})d - (2-\sqrt{3})d = 2\sqrt{3}d = 6 \quad \therefore d = \sqrt{3}$$

$$\therefore a = 2\sqrt{3}+3,\ b = 2\sqrt{3}-3,\ d = \sqrt{3} \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(3) $\triangle \mathrm{OAD}$，$\triangle \mathrm{PAO}$ において

$$\angle \mathrm{OAD} = \angle \mathrm{PAO},\ \angle \mathrm{AOD} = \angle \mathrm{APO} = 90^\circ$$

が成り立つから，$\triangle \mathrm{OAD} \backsim \triangle \mathrm{PAO}$ である。

$$\therefore\ \mathrm{AO} : \mathrm{AD} = \mathrm{AP} : \mathrm{AO} \quad \therefore \mathrm{AP} \cdot \mathrm{AD} = \mathrm{AO}^2$$

$\triangle \mathrm{OBD}$ と $\triangle \mathrm{QBO}$ で $\angle \mathrm{BOD} = \angle \mathrm{BQO} = 90^\circ$，$\angle \mathrm{ODB} = \angle \mathrm{QOB}$

が成り立つから，$\triangle \mathrm{OBD} \backsim \triangle \mathrm{QBO}$

したがって，$\mathrm{OB} : \mathrm{QB} = \mathrm{BD} : \mathrm{BO} \quad \therefore \mathrm{BD} \cdot \mathrm{BQ} = \mathrm{BO}^2$ $\cdots\cdots$ (証明終)

(4) (3) より

$$\mathrm{AD} \cdot \mathrm{BD} = \sqrt{(2\sqrt{3}+3)^2+3} \cdot \sqrt{(2\sqrt{3}-3)^2+3}$$

$$= \sqrt{24+12\sqrt{3}} \cdot \sqrt{24-12\sqrt{3}} = \sqrt{24^2 - 12^2 \cdot 3} = 12$$

$$\mathrm{AO}^2 \cdot \mathrm{BO}^2 = (2\sqrt{3}+3)^2 \cdot (2\sqrt{3}-3)^2 = (12-9)^2 = 9$$

$$\therefore \mathrm{AP} \cdot \mathrm{BQ} = \frac{\mathrm{AO}^2 \cdot \mathrm{BO}^2}{\mathrm{AD} \cdot \mathrm{BD}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

# ２０２４年　東北大学前期日程試験【　文系数学　】解答例

$\boxed{3}$

(1) $x > \dfrac{1}{\sqrt{t}-1}$ より，$\sqrt{t} > 1 + \dfrac{1}{x}$ となり，$t > \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2 \cdots$①

$x \geqq 2\log_t x$ より，$t^x \geqq x^2 \cdots$②

①，②より，$t^{x+1} \geqq t \cdot x^2 > \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2 x^2 = (x+1)^2$

つまり，$t^{x+1} > (x+1)^2$ となり，$\log_t t^{x+1} > \log_t (x+1)^2$

すなわち，$x + 1 > 2\log_t(x+1)$ がわかる。　$\cdots\cdots$ (証明終)

(2) $n \leqq 2\log_2 n = \log_2 n^2 \iff 2^n \leqq n^2$

$n = 1$ のとき，$1 \leqq 2\log_2 1 = 0$ は不成立。

$n = 2$ のとき，$2^2 \leqq 2^2$ となり成り立つ。

$n = 3$ のとき，$2^3 \leqq 3^2$ となり成り立つ。

$n = 4$ のとき，$2^4 \leqq 4^2$ となり成り立つ。

$n = 5$ のとき，$2^5 \leqq 5^2$ は不成立。

(1) より $n \geqq 5$ では，$n > 2\log_2 n$ が成り立ち $n + 1 > 2\log_2(n+1)$ も成り立つので，

$n \geqq 5$ ではすべて不成立。

よって，不等式を満たすのは $n = 2,\ 3,\ 4$ だけである。　$\cdots\cdots$ (答)

# ２０２４年　東北大学前期日程試験【　文系数学　】解答例

## 4

(1) $a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2}=(a_n+b_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=(a_n+2b_n)+(a_n+b_n)\sqrt{2}$ より

$a_{n+1}=a_n+2b_n,\ b_{n+1}=a_n+b_n$

$(a_1,\ b_1)=(1,\ 1)$ と上記の漸化式より

$(a_2,\ b_2)=(3,\ 2),\ (a_3,\ b_3)=(7,\ 5),(a_4,\ b_4)=(17,\ 12)$

$(a_5,\ b_5)=(41,\ 29),\ (a_6,\ b_6)=(99,\ 70)$

よって，$b_4=12,\ b_5=29,\ b_6=70$　……(答)

(2) $(1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}$ の証明

(I) $n=1$ のとき $a_1=b_1=1$ より成り立つ

(II) $n=k$ のとき成り立つと仮定，つまり，$(1-\sqrt{2})^k=a_k-b_k\sqrt{2}$ とする。

このとき，$(1-\sqrt{2})^{k+1}=(a_k-b_k\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$

$=(a_k+2b_k)-(a_k+b_k)\sqrt{2}=a_{k+1}-b_{k+1}\sqrt{2}$

よって，$n=k+1$ でも成り立つ。

(I)，(II) より，すべての自然数 $n$ について

$(1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}$ が成り立つ。　……(証明終)

(3) $b_{n+1}b_{n-1}-{b_n}^2=(a_n+b_n)b_{n-1}-b_n(a_{n-1}+b_{n-1})$

$=a_nb_{n-1}-b_na_{n-1}=(a_{n-1}+2b_{n-1})b_{n-1}-(a_{n-1}+b_{n-1})a_{n-1}$

$=2{b_{n-1}}^2-{a_{n-1}}^2\cdots\cdots(*)$

ここで，$(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ と $(1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}$ を辺々掛けて

$(-1)^n={a_n}^2-2{b_n}^2$ より，$2{b_n}^2-{a_n}^2=(-1)^{n+1}\quad(n\geqq 2)$

よって，$2{b_{n-1}}^2-{a_{n-1}}^2=(-1)^n$ となるので，

$n\geqq 2$ のとき，$b_{n+1}b_{n-1}-{b_n}^2=(-1)^n$ となる。　……(答)

(4) (1) より $b_6=70,\ b_5=29$ ゆえ

$70p-29q=1$ となる $p,\ q$ をまずさがす。

$70=29\times 2+12\cdots$①

$29=12\times 2+5\cdots$②

$12=5\times 2+2\cdots$③

$5=2\times 2+1\cdots$④ より，

$1=5-2\times 2=5-2(12-5\times 2)=5\times 5-12\times 2=(29-12\times 2)\times 5-12\times 2$

$=29\times 5-12\times 12=29\times 5-(70-29\times 2)\times 12=70\times(-12)+29\times 29$

$70p-29q=1$ と $70\times(-12)+29\times 29=1$ を並べ辺々引いて，

$70(p+12)-29(q+29)=0$ より，$p+12=29k,\ q+29=70k$ となる。

ここで，$0\leqq p,\ q\leqq 100$ を満たすのは，$k=1$ のときで，

$p=17,\ q=41$ となる。　……(答)