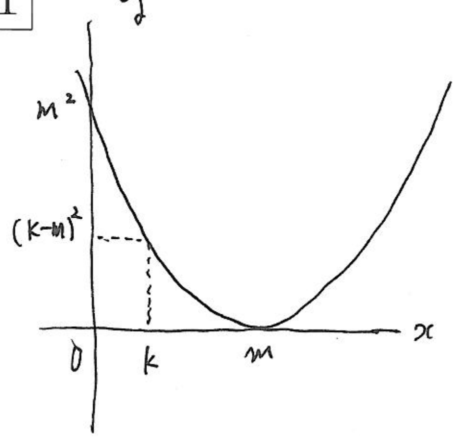
平成３０年　東北大学後期日程試験【　文系数学　】解答例

1



$$y = x^2 - 2mx + m^2 = (x-m)^2$$

(1) 整数 k について $(k-m)^2$ は整数である。…①

y軸上に $(0,0) \sim (0, m^2)$ の m^2+1 (個)

x軸上に $(0,0) \sim (m,0)$ の $m+1$ (個)

放物線上に $(0,m^2) \sim (m,0)$ の $m+1$ (個)

それぞれ格子点がある。$(0,0)$, $(0,m^2)$, $(m,0)$ の3点は共通するから

$$L_m = m^2+1+m+1+m+1-3 = m^2+2m$$

(2) ①から

$$T_m = \sum_{k=0}^{m} \{(k-m)^2+1\} = m^2+1+\sum_{k=1}^{m}(k^2-2mk+m^2+1)$$

$$= m^2+1+\frac{1}{6}\cdot m(m+1)(2m+1) - 2m\cdot\frac{m(m+1)}{2} + (m^2+1)m$$

$$= \frac{1}{3}m^3+\frac{1}{2}m^2+\frac{7}{6}m+1$$

(3)

$$T_m - \frac{m}{3}L_m = \frac{1}{3}m^3+\frac{1}{2}m^2+\frac{7}{6}m+1-\frac{m}{3}(m^2+2m)$$

$$= -\frac{1}{6}m^2+\frac{7}{6}m+1$$

$$= -\frac{1}{6}\left(m-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{73}{24}$$

m は1以上の整数より　$m = 3, 4$ のとき最大値 3

© 　C.A.P.特訓予備校

$\boxed{2}$

(1)　$n=1$ のとき．$x^4-2x^2-2+k=0$

$$x^2=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4(k-2)}}{2}=1\pm\sqrt{3-k}$$

$2<k<3$ より $1\pm\sqrt{3-k}$ は異なる正の実数であるから $a_2=4,\ b_2=0$

$n=2$ のとき　$x^4-4x^2+k=0$

$$x^2=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4k}}{2}=2\pm\sqrt{4-k}$$

$2<k<3$ より $2\pm\sqrt{4-k}$ は異なる正の実数であるから $a_3=4.\ b_3=0$

(2)　$2<k<3$ のとき (1) より $a_\ell=4.\ b_\ell=0$ ならば

$a_{\ell+1}=4.\ b_{\ell+1}=0$ がわかるから．このとき

$$\begin{cases} a_1=b_1=2 \\ a_n=4.\ b_n=0 \quad (n\geqq 2) \end{cases}$$

$k=3$ のときを考える。

$n=1$ のとき　$x^4-2x^2+1=0,\ (x^2-1)^2=0$　$\therefore\ a_2=2.\ b_2=0$

$n=2$ のとき　$x^4-2x^2+3=0$．$x^2=\dfrac{2\pm\sqrt{-8}}{2}=1\pm\sqrt{2}i$，$a_3=0.\ b_3=4$

$n=3$ のとき　$x^4-1=0$．$(x+1)(x-1)(x^2+1)=0$　$a_4=2.\ b_4=2$

$a_1=b_1=2$ の状態になった。あとはこれをくり返す。

$$\begin{cases} a_n=b_n=2 & (n\text{ が }3\text{ でわって }1\text{ 余る自然数}) \\ a_n=2.\ b_n=0 & (\quad〃\quad 2\ 〃\ ) \\ a_n=0.\ b_n=4 & (n\text{ が }3\text{ でわりきれる自然数}) \end{cases}$$

©　C.A.P.特訓予備校

平成３０年　東北大学後期日程試験【　文系数学　】解答例

3

(1) 1回目でひっくり返された列が2回目でまたひっくり返されれば条件をみたす。

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 6=\frac{1}{6}$$

(2) 横の列がすべてひっくり返されるか、縦の列がすべてひっくり返されるかの2通り考えられる。出る目は(1,2,3), (4,5,6)の組である。

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 3!+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 3!=\frac{1}{18}$$

(3) 上の横1列と下の横1列がうら返り、中央の縦列がひっくり返されるか

左の縦1列と右の縦1列がうら返り、中央の横1列がひっくり返されるか

の2通り考えられる。(1, 3, 5), (4, 6, 2)の出る目の組があり

順番を考えて

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 3!+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 3!=\frac{12}{216}=\frac{1}{18}$$

© C.A.P.特訓予備校

4

(1) a, b, c がすべて奇数と仮定すると

a^2+b^2 は偶数であり，c^2 は奇数となるので，

$a^2+b^2=c^2$ は不成立．

よって，a, b, c のうち少なくとも一つは偶数である

(2) a, b, c がすべて素数と仮定すると．

(1) より少なくとも 1つは偶数ゆえ

どれかは 2 である

$a<c,\ b<c$ は明らか．

(ア) $c=2$ のとき

$a^2+b^2=4$

となるがこれをみたす $a, b \in \mathbb{N}$ はない．

(イ) $c \neq 2$ のとき

$a=2$ としてよい．

$4+b^2=c^2$ より $(c+b)(c-b)=4$

$c>b$ より，$c-b=1, 2, 4$

$$\begin{cases} c-b=1 \rightarrow c+b=4 \rightarrow & c=\frac{5}{2},\ b=\frac{3}{2} \times \\ c-b=2 \rightarrow c+b=2 \rightarrow & c=2,\ b=0 \times \\ c-b=4 \rightarrow c+b=1 \rightarrow & c=\frac{5}{2},\ b=-\frac{3}{2} \times \end{cases}$$

いずれにしても条件をみたさない．

よって，a, b, c のうちに素数でないものがある。

© C.A.P.特訓予備校