平成２９年　東北大学後期日程試験【　数学　】解答例

$\boxed{1}$

理系 $\boxed{1}$ と同じ問題

$\boxed{2}$

$$(x+yi)^3 = x - yi + a \quad \cdots ①$$

(1)　$a=0$ のとき 実部、虚部を比較して（①の）

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = x & \cdots ② \\ 3x^2y - y^3 = -y & \cdots ③ \end{cases}$$

②より $x(x^2 - 3y^2 - 1) = 0$

$x=0$ のとき ③より $y = 0, \pm 1$

$x^2 - 3y^2 - 1 = 0$ のとき　③より $y(-8y^2 - 4) = 0$

$y = 0$. このとき $x = \pm 1$

$\therefore\ z = 0, \pm 1, \pm i$

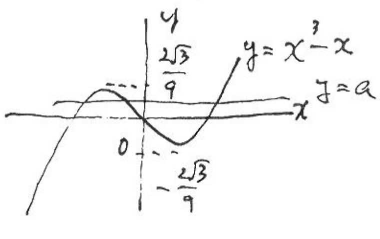
(2)　(1)と同様にして

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2y = x + a & \cdots ④ \\ 3x^2y - y^3 = -y & \cdots ⑤ \end{cases}$$

⑤より $y(y^2 - 3x^2 - 1) = 0$

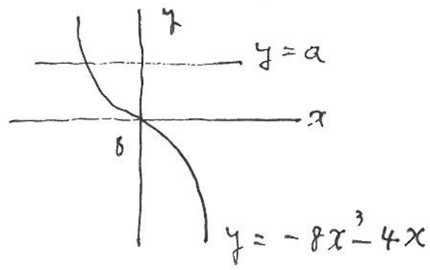
$y=0$ のとき ④より

$$a = x^3 - x$$



$y^2 - 3x^2 - 1 = 0$ のとき ④より

$$-8x^3 - 4x = a$$



x 1つの値について 2つの y が対応するので

$$-\frac{2\sqrt{3}}{9} < a < \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

3

(1) n個の玉から3個を取り出す方法は ${}_nC_3$ 通りである．
そのうち，k個の赤玉から2個，$(n-k)$個の青玉から1個取り出す方法は ${}_kC_2 \times {}_{n-k}C_1$ 通りである．よって

$$P(n,k) = \frac{{}_kC_2 \times {}_{n-k}C_1}{{}_nC_3} = \frac{3k(k-1)(n-k)}{n(n-1)(n-2)}$$

(2) (1)より

$$P(n,k+1) - P(n,k) = \frac{3k}{n(n-1)(n-2)}(2n-3k-1)$$

となる．$2n-3k-1 \geqq 0$ となるkは，$k \leqq \frac{2}{3}n - \frac{1}{3}$ で，nが3の倍数であるから，$k = 3, 4, \cdots, \frac{2}{3}n-1$ である．よって $\frac{3k}{n(n-1)(n-2)} > 0$ に注意して

$$P(n,k+1) - P(n,k) > 0 \quad , k = 3, 4, \cdots, \frac{2}{3}n-1$$

$$P(n,k+1) - P(n,k) < 0 \quad , k = \frac{2}{3}n \ , \cdots, \ n$$

よって，$k = \frac{2}{3}n$ のときに，$P(n,k)$は最大となる．
これより

$$P\left(n, \frac{2}{3}n\right) = \frac{2n(2n-3)}{9(n-1)(n-2)}$$

であるから，$3 \leqq k < n$ において，$P(n,k)$ は $k = \frac{2}{3}n$ において最大値 $\frac{2n(2n-3)}{9(n-1)(n-2)}$ をとる．

$\boxed{4}$

理系 $\boxed{5}$ と同じ問題