1

問(1)

(a) 箱 P と箱 Q の間に働く静止摩擦力の大きさを f とすると運動方程式は,

$$\begin{cases} Ma_0 = F_0 - f & (\text{箱 P}) \\ ma_0 = f & (\text{箱 Q}) \end{cases}$$

である。辺々を足して f を消去して,

$$a_0 = \underline{\frac{F_0}{M+m}}$$

であり,「みかけの質量」は「力 F」÷「箱 P の加速度」なので,

$$M_0 = \frac{F_0}{a_0} = \underline{M+m}$$

を得る。

(b) 静止摩擦力の大きさ f は, $f \leqq \mu mg$ を満たす。(a)の箱 Q の運動方程式より，求める条件は

$$ma_0 \leqq \mu mg$$

$$\therefore\ \underline{a_0 \leqq \mu g}$$

である。

問(2)

(a) 滑り始めたことから，箱 P と箱 Q の間に働く静止摩擦力は μmg であり，この時の箱 P と箱 Q の加速度を α とすると運動方程式は,

$$\begin{cases} M\alpha = F_1 - \mu mg & (\text{箱 P}) \\ m\alpha = \mu mg & (\text{箱 Q}) \end{cases}$$

である。箱 Q の運動方程式から $\alpha = \mu g$ なので，これを箱 P の運動方程式に代入して,

$$F_1 = \underline{\mu(M+m)g}$$

である。

(b) 箱 Q が滑っているとき[※1]，箱 P は $-\mu' mg$ の動摩擦力を受けるので，運動方程式は

$$Ma_1 = F_1 - \mu' mg$$

である。$F_1 = \mu(M+m)g$ から,

$$a_1 = \frac{1}{M}\{\mu(M+m)g - \mu' mg\}$$
$$= \underline{\frac{g}{M}\{\mu(M+m) - \mu' m\}}$$

となる。よってみかけの質量は

$$M_1 = \frac{F_1}{a_2} = \underline{\frac{\mu(M+m)M}{\mu(M+m) - \mu' m}}$$

となる。

問(3)

(a) 箱 P に働く動摩擦力は $\mu' mg$ であるから，箱 P の運動方程式は

$$Ma_2 = F_1 + \mu' mg$$

である。これは，問(2)(b)の式で $\mu' \to -\mu'$ としたものである。よって，求める a_2, M_1 は

$$a_2 = \underline{\frac{g}{M}\{\mu(M+m) + \mu' m\}},\quad M_2 = \underline{\frac{\mu(M+m)M}{\mu(M+m) + \mu' m}}$$

となる。

(b) M_0 と M_1 について,

$$\frac{M_1}{M_0} = \frac{\mu M}{\mu(M+m) - \mu' m}$$
$$= \frac{\mu M}{\mu M + (\mu - \mu')m} < 1 \quad (\because\ \mu' < \mu)$$

よって，$M_1 < M_0$ である。また M_1 と M_2 について,

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{\mu(M+m) - \mu' m}{\mu(M+m) + \mu' m} < 1$$

なので，$M_2 < M_1$ であるから大小関係は,

$$\underline{M_2 < M_1 < M_0}$$

となる。

問(4) 問(1)〜問(3)の結果から

$$\begin{cases} (M+m)a_0 = F_0 & \cdots\cdots① \\ F_1 = \mu(M+m)g & \cdots\cdots② \\ Ma_1 = F_1 - \mu' mg & \cdots\cdots③ \\ Ma_2 = F_1 + \mu' mg & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

である。③と④の辺々を足して,

$$M(a_1 + a_2) = 2F_1 \quad \rightarrow \quad M = \underline{\frac{2F_1}{a_1 + a_2}} \quad \cdots\cdots⑤$$

さらに，⑤を①に代入して,

$$m = \underline{\frac{F_0}{a_0} - \frac{2F_1}{a_1 + a_2}} \quad \cdots\cdots⑥$$

を得る。①と②の辺々を割って,

$$\frac{a_0}{\mu g} = \frac{F_0}{F_1} \quad \rightarrow \quad \mu = \underline{\frac{F_1 a_0}{F_0 g}}$$

となる。また，③と④の辺々を引いて,

$$M(a_1 - a_2) = -2\mu' mg$$

が得られる。⑤，⑥を代入して,

$$\mu' = \frac{F_1(a_2 - a_1)}{mg(a_2 + a_1)}$$
$$= \frac{a_0(a_1 + a_2)}{(a_1 + a_2)F_0 - 2F_1 a_0} \cdot \frac{F_1(a_2 - a_1)}{g(a_2 + a_1)}$$
$$= \underline{\frac{F_1 a_0 (a_2 - a_1)}{g\{(a_1 + a_2)F_0 - 2F_1 a_0\}}}$$

を得る。

[※1] 問題文の「このとき」は箱 Q が平面 K を滑っているときであることに注意

2

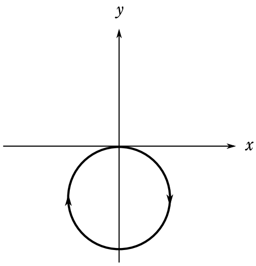
問(1)

(a) z 方向の力がつり合えばいいので,

$$qE - mg = 0 \quad \rightarrow \quad E = \underline{\frac{mg}{q}}$$

である。

(b) 粒子はローレンツ力を向心力とする円運動を行う。原点においてローレンツ力は y 軸負の方向を向いているので, 軌跡は下の図のようになる。



(c) 一般の E の場合にも粒子の軌道の xy 平面への射影は(b)で図示した円になる。ローレンツ力が向心力になっているので,

$$\frac{mv_0^2}{r} = qv_0B$$

が成り立つ。よって半径 $r = \dfrac{mv_0}{qB}$ で, 角速度 $\omega = \dfrac{qB}{m}$ である。$t = 0$ で粒子が原点にあり, (b)で図示した方向に円軌道を描くので, 粒子軌道の xy 平面への射影 ※2 は

$$(x,\ y) = \left(\frac{mv_0}{qB}\sin\frac{qB}{m}t,\ \frac{mv_0}{qB}\left(\cos\frac{qB}{m}t - 1\right)\right)$$

となる。z 方向の加速度を a_z とすると, 運動方程式は

$$ma_z = qE - mg$$

である。よって $a_z = \dfrac{qE}{m} - g$ で, z 方向は初速度 0 の等加速度運動である。よって, 時刻 t における, 粒子の座標は,

$$x = \underline{\frac{mv_0}{qB}\sin\frac{qB}{m}t},\ y = \underline{\frac{mv_0}{qB}\left(\cos\frac{qB}{m}t - 1\right)}$$

$$z = \underline{\frac{1}{2}\left(\frac{qE}{m} - g\right)t^2}$$

問(2)

(a) $E = 0$, $B = 0$ のとき, x 方向は等速度運動であり, z 方向は加速度 $-g$ の等加速度運動なので, 運動は xz 平面に限られる。時刻 t での座標は,

$$(x,\ z) = \left(v_0t,\ v_1t - \frac{1}{2}gt^2\right)$$

である。$z = 0$ として, $t_1 = \underline{\dfrac{2v_1}{g}}$ であり,

$$x = v_0t_1 = \underline{\frac{2v_1v_0}{g}}, \quad y = \underline{0}$$

(b) $E = 0$, $B > 0$ のとき, 粒子の軌道の xy 平面への射影は問(1)(c)で求めた円になる。よって, 問(1)(c)で求めた x 座標, y 座標の式に $t_1 = \dfrac{2v_1}{g}$ を代入して,

$$x = \underline{\frac{mv_0}{qB}\sin\frac{2v_1qB}{mg}},\ y = \underline{\frac{mv_0}{qB}\left(\cos\frac{2v_1qB}{mg} - 1\right)}$$

となる。

(c) 問(2)(b)の結果から, 時刻 t_1 で粒子が原点にいるためには,

$$\frac{mv_0}{qB}\sin\frac{2v_1qB}{mg} = 0,\ \text{かつ},\ \frac{mv_0}{qB}\left(\cos\frac{2v_1qB}{mg} - 1\right) = 0$$

ならよい。よって, 自然数 N を用いて,

$$\frac{2v_1qB}{mg} = 2N\pi \quad \rightarrow \quad B = \frac{m\pi g}{v_1q}N$$

ならよい。N は自然数なので, B は $N = 1$ のとき最小になり, $B_{\min} = \underline{\dfrac{m\pi g}{v_1q}}$ である。

(d) $E \fallingdotseq 0$ のとき, 粒子が xy 平面を通過する時刻を t_2 とおく。z 方向の運動は等加速度運動であり, 加速度は問(1)(c)で求めた a_z である。よって, 時刻 t での z 座標は,

$$z = v_1t + \frac{1}{2}\left(\frac{qE}{m} - g\right)t^2$$

である。$z = 0$ として, $t_2 = \dfrac{2mv_1}{mg - qE}$ である。この時刻で, x 座標, y 座標がともに 0 なら良いので問(2)(b)および(c)と同様に

$$\frac{qBt_2}{m} = 2N\pi \quad \rightarrow \quad \frac{2qBv_1}{mg - qE} = 2N\pi \qquad (N:\text{自然数})$$

ならよい。これを解いて,

$$E = \frac{mg}{q} - \frac{Bv_1}{N\pi}$$

よって E は $N = 1$ で最小になり,

$$E_{\min} = \underline{\frac{mg}{q} - \frac{Bv_1}{\pi}}$$

である。

※2 半径 r, 角速度 ω として, 中心が $(0,\ -r)$ の円運動は一般に $(x,\ y) = (r\cos(\omega t + \phi),\ r\{\sin(\omega t + \phi) - 1\})$ である。$t = 0$ で $x = y = 0$ なので, $(0,\ 0) = (r\cos\phi,\ r(\sin\phi - 1))$ となり, 初期位相 $\phi = \dfrac{\pi}{2}$ より求める答えを得る。

3

問(1)

(a) ③の $A_1=-A_2$ を，④に代入して，

$$A_1\sin\left\{2\pi\left(ft+\frac{L}{\lambda}\right)\right\}=-A_1\sin\left\{2\pi\left(ft-\frac{L}{\lambda}\right)\right\}$$
$$A_1\sin\left\{2\pi\left(ft+\frac{L}{\lambda}\right)\right\}+A_1\sin\left\{2\pi\left(ft-\frac{L}{\lambda}\right)\right\}=0$$
$$2A_1\sin(\underbrace{2\pi ft}_{(ア)})\cos\underbrace{\left(\frac{2\pi L}{\lambda}\right)}_{(イ)}=0$$

を得る[※3]。また，

$$\frac{2\pi L}{\lambda}=\frac{2m-1}{2}\pi \quad\rightarrow\quad \lambda=\underbrace{\frac{4L}{2m-1}}_{(ウ)}$$

である。①，②，③より，

$$\begin{aligned}F(t,x)&=F_1(t,x)+F_2(t,x)\\&=A_1\sin\left\{2\pi\left(ft+\frac{x}{\lambda}\right)\right\}+A_2\sin\left\{2\pi\left(ft-\frac{x}{\lambda}\right)\right\}\\&=A_1\sin\left\{2\pi\left(ft+\frac{x}{\lambda}\right)\right\}-A_1\sin\left\{2\pi\left(ft-\frac{x}{\lambda}\right)\right\}\\&=2A_1\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\cos(2\pi ft)\\&=\underbrace{2A_1\sin\left\{\frac{\pi x}{2L}(2m-1)\right\}}_{(エ)}\cos(\underbrace{2\pi ft}_{(オ)})\quad(\because\ ⑦)\end{aligned}$$

となる[※4]。

(b) ⑧の式から，節の座標は

$$\frac{\pi x}{2L}(2m-1)=N\pi\quad(N：整数)\quad\rightarrow\quad x=\frac{2NL}{2m-1}$$

$m=3$ として，$x=\frac{2NL}{5}$ なので，$0\leqq x\leqq L$ より，

$$x=\underline{0,\ \frac{2}{5}L,\ \frac{4}{5}L}$$

(c) 開口端での反射は自由端反射なので，$x=0$ での反射波の振幅は入射波と等しい。つまり，$F_1(t,0)=F_2(t,0)$ であり，$A_1=A_2$ を意味する。またもう一方の端 $x=L$ で $F_1(t,L)=F_2(t,L)$ が成り立っている。よって，

$$A_1\sin\left\{2\pi\left(ft+\frac{L}{\lambda}\right)\right\}-A_1\sin\left\{2\pi\left(ft-\frac{L}{\lambda}\right)\right\}=0$$
$$2A_1\sin\left(\frac{2\pi L}{\lambda}\right)\cos(2\pi ft)=0$$

であり，これが任意の時刻で成り立っている場合には，$\frac{2\pi L}{\lambda}=n\pi$　(n：自然数) なので，$\lambda=\underline{\frac{2L}{n}}$ である。また $F(t,x)=F_1(t,x)+F_2(t,x)$ なので，

$$\begin{aligned}F(t,x)&=F_1(t,x)+F_2(t,x)\\&=A_1\sin\left\{2\pi\left(ft+\frac{x}{\lambda}\right)\right\}+A_1\sin\left\{2\pi\left(ft-\frac{x}{\lambda}\right)\right\}\\&=2A_1\sin(\pi ft)\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\\&=\underline{2A_1\sin(2\pi ft)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}\end{aligned}$$

となる[※5]。

問(2)

(a) 閉管の m 倍振動の振動数は $f_{閉}=\frac{2m-1}{4L}V$，開管の n 倍振動の振動数は $f_{開}=\frac{nV}{2L}$ である。ドップラー効果の公式より，閉管が共鳴した振動数は $\frac{V}{V+v_s}f_s$，開管が共鳴した振動数は $\frac{V}{V-v_s}f_s$ である。よって，

$$\frac{2m-1}{4L}V=\frac{V}{V+v_s}f_s,\qquad \frac{nV}{2L}=\frac{V}{V-v_s}f_s\quad\cdots\cdots(*)$$

である。この２式の辺々を割って，

$$\frac{2m-1}{2n}=\frac{V-v_s}{V+v_s}=\frac{1-\frac{v_s}{V}}{1+\frac{v_s}{V}}$$

となるので，これを解いて $\frac{v_s}{V}=\underline{\frac{2n-2m+1}{2n+2m-1}}$

(b) $\frac{2m-1}{4L}V=\frac{V}{V+v_s}f_s$ に $L=1\,\mathrm{m}$ を代入して

$$\frac{2m-1}{4}=\frac{f_s}{V+v_s}\ \rightarrow f_s=\frac{2m-1}{4}(V+v_s)\quad\cdots\cdots Ⓐ$$

を得る。$v_s\leqq\frac{1}{3}V$ より $V\leqq V+v_s\leqq\frac{4}{3}V\cdots\cdots$ Ⓑである。Ⓐと $300\,\mathrm{Hz}\leqq f_s\leqq 400\,\mathrm{Hz}$ より

$$300\leqq\frac{2m-1}{4}(V+v_s)\leqq400$$
$$\frac{4\cdot300}{2m-1}\leqq(V+v_s)\leqq\frac{4\cdot400}{2m-1}\quad\cdots\cdots Ⓒ$$

Ⓑ，Ⓒが共通部分を有するのは $m=2$ のときのみである。よって $m=\underline{2}$

(c) $m=2$，$V=340\,\mathrm{m/s}$ のとき，条件 $(*)$ から，

$$\frac{3}{4}(V+v_s)=f_s,\qquad \frac{n}{2}(V-v_s)=f_s$$

である。v_s を消去して，

$$f_s=\frac{3n}{2n+3}V$$

となる。$V=340\,\mathrm{m/s}$ および $300\,\mathrm{Hz}\leqq f_s\leqq400\,\mathrm{Hz}$ より，$n=3,4,5$ が適する。ここで，問(2)(a)および $v_s\leqq\frac{1}{3}V$，$m=2$ という条件から

$$\frac{2n-2\cdot2+1}{2n+2\cdot2-1}\leqq\frac{1}{3}\quad\rightarrow\quad n\leqq3$$

であり，$n=3$ である。
以上から $f_s=\frac{3\cdot3}{2\cdot3+3}V=\underline{340\,\mathrm{Hz}}$ となる。

※3 問題文の誘導的には加法定理で展開するということだが，$\sin A+\cos B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ を使ってもよい。

※4 解答にもあるように⑧の式から，節の座標は $\frac{\pi x}{2L}(2m-1)=N\pi\,(N：整数)\ \rightarrow\ x=\frac{2NL}{2m-1}$ となる。ここで，$0\leqq x\leqq L$ なので，$0\leqq N\leqq m-\frac{1}{2}$ となる。これが問題文中で言及されている節の数が m であることの証明である。

※5 問題文の指示は「問(1)(a)にならって」であるが，解答用紙のスペース，試験時間の観点から厳しいと思われる。