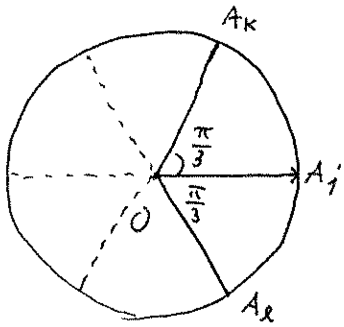
$\boxed{1}$

与式より

$$|\overrightarrow{OA_j}|^2 = |\overrightarrow{OA_k} + \overrightarrow{OA_\ell}|^2$$
$$= |\overrightarrow{OA_k}|^2 + 2\overrightarrow{OA_k}\cdot\overrightarrow{OA_\ell} + |\overrightarrow{OA_\ell}|^2$$

条件より $|\overrightarrow{OA_j}| = |\overrightarrow{OA_k}| = |\overrightarrow{OA_\ell}| = 1$，$\overrightarrow{OA_k}$ と $\overrightarrow{OA_\ell}$ のなす角を θ とおくと

$$1 = 1 + 2\cdot1\cdot1\cos\theta + 1 \quad ,\ \cos\theta = -\frac{1}{2} \quad ,\ \theta = \frac{2}{3}\pi$$



となる.

$$\overrightarrow{OA_k} = \overrightarrow{OA_j} + (-\overrightarrow{OA_\ell}) \ ,\quad \overrightarrow{OA_\ell} = \overrightarrow{OA_j} + (-\overrightarrow{OA_k})$$

$-\overrightarrow{OA_j} = (-\overrightarrow{OA_k}) + (-\overrightarrow{OA_\ell})$ となる。

1つの式　$\overrightarrow{OA_j} = \overrightarrow{OA_k} + \overrightarrow{OA_\ell}$　が他のものについても成り立つためには

正六角形状の6つの点があることが必要十分.

よって.　n は6の倍数である.

$\boxed{2}$

(1) $n+2$ 日後に感染を発生させる人は n 日後に感染している人全員であるから、$n+2$ 日後に増える感染者は $2a_n$ 人。したがって

$$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$$

(2) $a_{n+1}=a_n+2a_{n-1}\ (n\geqq 2)$ より

$$\begin{aligned}a_{n+1}+a_n&=2(a_n+a_{n-1})\\&=2^{n-1}(a_2+a_1)\\&=2^{n-1}(3+1)=2^{n+1}\quad\text{―①}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{n+1}-2a_n&=-(a_n-2a_{n-1})\\&=(-1)^{n-1}(a_2-2a_1)\\&=(-1)^{n-1}\quad\text{―②}\end{aligned}$$

①,② は $n=1$ でも成り立つ

(①−②)÷3 より $a_n=\dfrac{1}{3}\left\{2^{n+1}+(-1)^n\right\}$

(3) $\dfrac{1}{3}\left\{2^{n+1}+(-1)^n\right\}>10000$

$\Leftrightarrow\ 2^{n+1}+(-1)^n>30000$

ここで $n=13$ のとき 左辺 $=16383$

$n=14$ のとき 左辺 $=32769$

よって 14日後

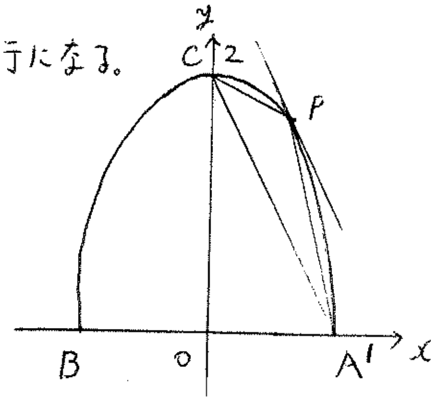
$\boxed{3}$

文系 $\boxed{3}$ と同じ

$\boxed{4}$

曲線 $y=2\sqrt{1-x^2}$ は楕円 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ の $y\geqq 0$ の部分である

(1) 四角形OAPCの面積が最大となるのは、△APCの面積が最大となるときであり、このときPにおける曲線の接線は直線ACと平行になる。



Pの座標を $(\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ 　$\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと

Pにおける接線の方程式は $\cos\theta\cdot x+\frac{\sin\theta}{2}y=1$

これが直線AC：$2x+y=2$ と平行なので

$$2\cdot\frac{\sin\theta}{2}=1\cdot\cos\theta$$

$$\sin\theta=\cos\theta$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$2\sin^2\theta=1$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より

$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 　$\therefore\ P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$

このとき四角形 $OAPC=\triangle OAP+\triangle OPC$

$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{2}+\frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\sqrt{2}$$

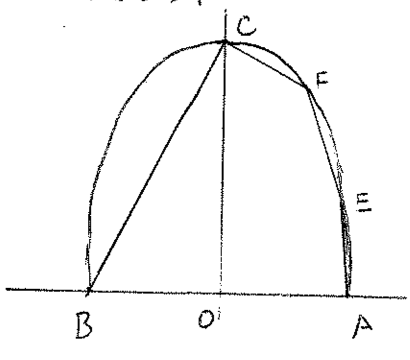
(2) (i) Eを第一象限，Fを第二象限にとるとき，

五角形AECFB＝四角形OAEC＋四角形OCFB

で，(1)よりそれぞれの四角形の面積の最大値は $\sqrt{2}$ であるので

五角形の面積の最大値は $2\sqrt{2}$

(ii) E，Fをともに第一象限にとるとき，



五角形AEFCB＝五角形OAEFC＋△OCB

$<$ 

$+\triangle OCB$

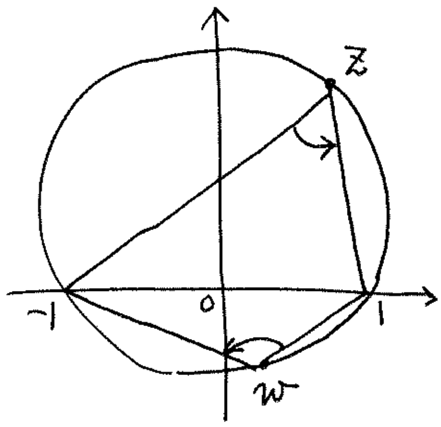
$$=\frac{1}{4}\cdot1\cdot2\cdot\pi+\frac{1}{2}\cdot1\cdot2=\frac{\pi}{2}+1<2\sqrt{2}$$

よって五角形の面積の最大値は $2\sqrt{2}$

$\boxed{5}$

$w \neq z$, $\mathrm{Im}(z)>0$, $\mathrm{Im}(w)<0$ とする(右図)

(1) このとき



1, z, −1, w が同一円周上にある

⇕

$$\arg\frac{-1-w}{1-w} + \arg\frac{1-z}{-1-z} = \pi$$

⇕

$$\arg\left(\frac{-1-w}{1-w}\right)\left(\frac{1-z}{-1-z}\right) = \pi$$

⇕

$\dfrac{(-1-w)}{(1-w)}\times\dfrac{(1-z)}{(-1-z)}$ が負の実数

⇕

$\dfrac{(1+w)}{(1-w)}\times\dfrac{(1-z)}{(1+z)}$ が負の実数

(2) $w=\dfrac{1+z^2}{2}=\dfrac{1+x^2-y^2+2xyi}{2}=\dfrac{1+x^2-y^2}{2}+xyi$ で $xy<0$ ゆえ

1, z, −1, w は(1)の条件をみたしている。よって

$\dfrac{(1+w)(1-z)}{(1-w)(1+z)} = -k\ (k>0)$ となり これを変形して

$(1-z)\left(1+\dfrac{1+z^2}{2}\right) = -k(1+z)\left(1-\dfrac{1+z^2}{2}\right)$

⇔ $(1-z)\times\dfrac{z^2+3}{2} = -k\times(1+z)\times\dfrac{(1-z)(1+z)}{2}$

⇔ $z^2+3 = -k\times(1+z)^2$ (∵ $z\neq1$)

⇔ $x^2-y^2+3+2xyi = -k\{(1+x)^2-y^2+2(1+x)yi\}$

⇔ $\begin{cases} x^2-y^2+3=-k\{(1+x)^2-y^2\} & \text{—①} \\ xy=-k(1+x)y & \text{—②} \end{cases}$

② より $x=-(1+x)k$ (∵ $y\neq0$)

$k=-\dfrac{x}{1+x}>0$ かつ $x<0$ より

$-1<x<0,\ y>0$ —③

k を①に代入して

$x^2-y^2+3=\dfrac{x}{1+x}\{(x+1)^2-y^2\}$

⇔ $(1+x)(x^2-y^2+3)=x(x^2-y^2+2x+1)$

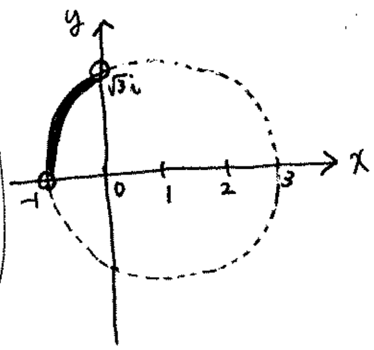
⇔ $x^2+y^2-2x-3=0$

⇔ $(x-1)^2+y^2=4$ —④

③, ④ より z の軌跡は

円 $|z-1|=2$ の $-1<\mathrm{Re}(z)<0$ かつ $\mathrm{Im}(z)>0$

の部分である



$\boxed{6}$

(1) $$\int_0^{2\pi} x^2\cos nx\,dx = \left[\frac{1}{n}x^2\sin nx\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} 2x\sin nx\,dx$$

$$= 0 + \frac{2}{n}\left[\frac{1}{n}x\cos nx\right]_0^{2\pi} - \frac{2}{n^2}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx$$

$$= \frac{4\pi}{n^2} - \frac{2}{n^2}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{4\pi}{n^2}$$

(2) $$I = \int_0^{2\pi} x^4\,dx - 2a\int_0^{2\pi} x^2\cos 2x\,dx + a^2\int_0^{2\pi}\cos^2 2x\,dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{2\pi} - 2a\cdot\frac{4\pi}{4} + a^2\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 4x}{2}\,dx \qquad \text{((1)より)}$$

$$= \frac{32}{5}\pi^5 - 2\pi a + a^2\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin 4x\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{32}{5}\pi^5 - 2\pi a + \pi a^2$$

$$= \pi(a-1)^2 + \frac{32}{5}\pi^5 - \pi$$

よって $a=1$ のとき I の最小値 $\frac{32}{5}\pi^5 - \pi$