$\boxed{1}$

(1) $a^2+b^2+c^2-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

$abc=1$ より

$=abc\left\{a^2+b^2+c^2-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right\}$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}\geqq 0$

（∵ $(\text{実数})^2\geqq 0$ より）等号は $a=b=c$ のとき成立

よって $a^2+b^2+c^2\geqq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

(2) $\sqrt{a}=A$, $\sqrt{b}=B$, $\sqrt{c}=C$ とおくと

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})=\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}-(A+B+C)$

$ABC=1$ より

$=A^2B^2C^2\left(\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}\right)-(A+B+C)ABC$

$=A^2B^2+B^2C^2+C^2A^2-(A^2BC+AB^2C+ABC^2)$

$=\frac{1}{2}B^2(A-C)^2+\frac{1}{2}A^2(B-C)^2+\frac{1}{2}C^2(A-B)^2\geqq 0$

（∵ $(\text{実数})^2\geqq 0$.）等号は $a=b=c$ のとき成立

以上から $a^2+b^2+c^2\geqq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ が成立する

（等号は $a=b=c$ のとき）

(2) $\sqrt[3]{a}=A$, $\sqrt[3]{b}=B$, $\sqrt[3]{c}=C$ とおくと $ABC=1$ より

$a+b+c-3=A^3+B^3+C^3-3ABC$

$=(A+B+C)\left\{\frac{1}{2}(A-B)^2+\frac{1}{2}(B-C)^2+\frac{1}{2}(C-A)^2\right\}\geqq 0$

（∵ $A>0$, $B>0$, $C>0$, $(\text{実数})^2\geqq 0$）等号は $a=b=c$ のとき成立

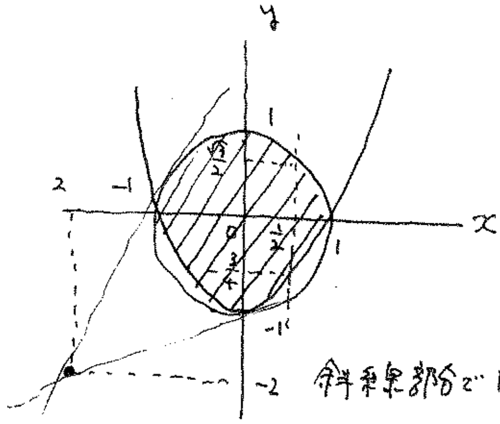
∴ $a+b+c\geqq 3$

$\boxed{2}$

(1)
$$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots ① \\ y=x^2-1 & \cdots ② \end{cases}$$

①, ②より $y^2+y=0$. $y=-1, 0$

交点の座標 $(0,-1)$, $(\pm 1, 0)$



斜線部分で境界を含む

(2) $y=k(x+2)-2 \cdots ③$

①と③が接するとき $\dfrac{|2k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$ 両辺を2乗して整理し

$3k^2-8k+3=0$, $k=\dfrac{4\pm\sqrt{7}}{3}$

②と③が接するとき yを消去した式 $x^2-1=k(x+2)-2$ の

判別式 $D=k^2+8k-4=0$, $k=-4\pm 2\sqrt{5}$

③は点$(-2,-2)$を通るので $-4+2\sqrt{5}\leqq k\leqq\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$ …(答)

$\boxed{3}$

サイコロをすべて区別して、場合の数を数えあげる
事象Bを次の2つの場合に分けて考える
(ア) 7コすべてが同じ目になる。
(イ) 7コ中6コが同じ目で、1つだけ異なる目になる。

(ア)は、6とおりあり、(イ)は $_7C_1 \times 6 \times 5 = 7 \times 6 \times 5$ とおりとなる。

よって、$\overline{B}$ が起こる確率は

$$P(\overline{B}) = 1 - \frac{6 + 7 \times 6 \times 5}{6^7} = 1 - \frac{1+35}{6^6} = 1 - \frac{1}{6^4} = \frac{6^4 - 1}{6^4}$$

$$= \frac{(6^2+1)(6+1)(6-1)}{6^4} = \frac{37 \times 7 \times 5}{6^4}$$

一方、事象Aでは、1〜6の目がすべて出て、かつ、1つの目だけ2回現れるので、
2回出る目の選び方が $_6C_1$ とおりあり、そのおのおのについて、その順列は

$\dfrac{7!}{2!1!1!1!1!1!}$ だけあるので、$_6C_1 \times \dfrac{7!}{2!} = 3 \times 7!$ とおり

よって、$P(A) = \dfrac{3 \times 7!}{6^7}$ となる。

ここで $\overline{B} \supset A$ ゆえ、求める確率は、

$$P_{\overline{B}}(A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(\overline{B})} = \frac{P(A)}{P(\overline{B})} = \frac{3 \times 7!}{6^7} \times \frac{6^4}{37 \times 7 \times 5}$$

$$= \frac{\cancel{3} \times \cancel{7} \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \overset{2}{\cancel{4}} \times \cancel{3} \times \cancel{2}}{\cancel{2}\,\cancel{6}\,\cancel{3} \times 37 \times \cancel{7} \times \cancel{5}} = \underline{\frac{2}{37}}$$ となる。

$\boxed{4}$

(1) $\overrightarrow{OP} = t(0, \sqrt{3}) + (1-t)(1, 0) = (1-t, \sqrt{3}t)$

$\overrightarrow{OQ} = (1-t)(0, \sqrt{3}) + t(-1, 0) = (-t, \sqrt{3}(1-t))$

これより $OP = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}$，$OQ = \sqrt{4t^2 - 6t + 3}$，$PQ = \sqrt{12t^2 - 12t + 4}$

余弦定理から

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2OP \cdot OQ \cos\theta$$

これと $T = t - t^2$ より

$$-12T + 4 = -8T + 4 - 2\sqrt{16T^2 - 12T + 3}\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{2T}{\sqrt{16T^2 - 12T + 3}} \quad \cdots\text{(答)}$$

(2) $T = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$，$0 < t < 1$ より $0 < T \leqq \frac{1}{4}$ $\cdots$①

(1) より

$$\cos\theta = \frac{2T}{\sqrt{16T^2 - 12T + 3}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{3}{T^2} - \frac{3 \cdot 4}{T} + 16}} = \frac{2}{\sqrt{3\left(\frac{1}{T} - 2\right)^2 + 4}}$$

①より $\frac{1}{T} \geqq 4$ より

$$0 < \cos\theta \leqq \frac{1}{2}$$

θ の最小値は $\frac{\pi}{3}$ $\cdots$ (答)