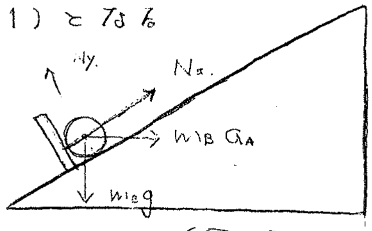
1

問(1)(a) 小球Bに働く力を図示すると(図1)となる



(図1)

∴ $F_x = m_B a_A \cos\theta - m_B g \sin\theta$

$F_y = -m_B a_A \sin\theta - m_B g \cos\theta$

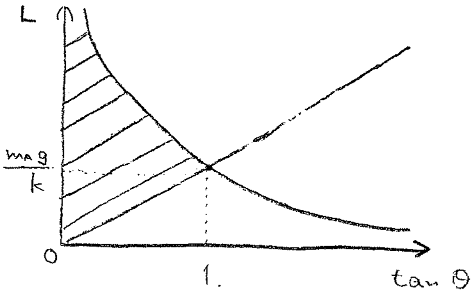
(b) 台とともに動く観測者から見て、

$F_x > 0$ ならよいので 問1.(a)より、$a_A > g\tan\theta$

問(2)(a) 物体Aの加速度はばねが最も縮んだ時最大値 $\frac{kL}{m_A}$ をとる。
よって、問1の図において、$m_B a_A$ が右向きで最大となるのもこの時である
この時 $F_x > 0$ ならよいので $\frac{m_B}{m_A}kL\cos\theta - m_B g\sin\theta > 0$　$L > \frac{m_A g}{k}\tan\theta$

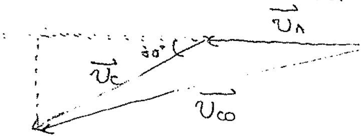
(b) 物体Aの加速度はばねが最も伸びた時最小値 $-\frac{kL}{m_A}$ をとる。
よって、問1の図において $m_B a_A$ が左向で最大となるのもこの時である
この時 $F_y \leqq 0$ ならよいので $\frac{m_B}{m_A}kL\sin\theta - m_B g\cos\theta \leqq 0$。$L \leqq \frac{m_A g}{k\tan\theta}$

(c) 問(2)(a)、(b)より、Lの条件は $\frac{m_A g}{k}\tan\theta < L < \frac{m_A g}{k\tan\theta}$
このようなθが存在するならば $\frac{m_A g}{k}\tan\theta < \frac{m_A g}{k\tan\theta}$ である。∴ $\tan^2\theta < 1$
よって、$\theta_{max} = 45°$ で図は(図2)となる



(図2)

問(3)(a) 衝突直前の水平面上の観測点から見た小球Cの速度ベクトルを $\overrightarrow{v_{C0}}$ とすると相対速度の公式より
$\overrightarrow{v_C} = \overrightarrow{v_{C0}} - \overrightarrow{v_A} \Rightarrow \overrightarrow{v_C} + \overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{v_{C0}}$
でこれを図示すると



となり $\overrightarrow{v_{C0}}$ の水平成分は $v_A + v_C\cos 30° = v_A + \frac{\sqrt{3}}{2}v_C$

水平方向の運動量は保存するので $m_A v_A + m_C\left(v_A + \frac{\sqrt{3}}{2}v_C\right) = (m_A + m_C)v_A'$

∴ $v_A' = v_A + \frac{\sqrt{3}\,m_C}{2(m_A + m_C)}v_C$

(b) 衝突で失われたエネルギーの大きさΔEは、

$$\Delta E = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_C v_C^2 - \frac{1}{2}(m_A + m_C)\left\{v_A + \frac{\sqrt{3}\,m_C}{2(m_A + m_C)}v_C\right\}^2$$

$$= \frac{4m_A m_C + m_C^2}{8(m_A + m_C)}v_C^2$$

よって $\frac{1}{2}kL^2 - \Delta E = \frac{1}{2}kL'^2$

$$L'^2 = L^2 - \frac{2}{k}\Delta E = L^2 - \frac{4m_A m_C + m_C^2}{4(m_A + m_C)k}v_C^2$$

$$∴\ L' = \sqrt{L^2 - \frac{4m_A m_C + m_C^2}{4(m_A + m_C)k}v_C^2}$$

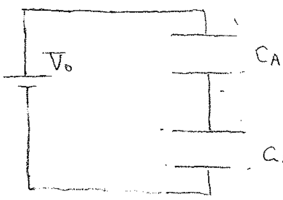
平成２８年　東北大学前期日程試験【　物　理　】解答例

2

問(1) (a) 電気容量は面積に比例し、極板間の距離に反比例する。
また、その比例定数は ϵ_0 である。

$$\therefore\ C_A = \epsilon_0 \frac{S}{4d - x}, \quad C_B = \epsilon_0 \frac{S}{x}$$

(b) この回路は(図1)の回路と等価である。



(図1)

直列接続の場合の合成電気容量の公式より

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B} = \frac{4d}{\epsilon_0 S} \Rightarrow C = \epsilon_0 \frac{S}{4d}$$

$$U = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{\epsilon_0 S}{8d} V_0^2$$

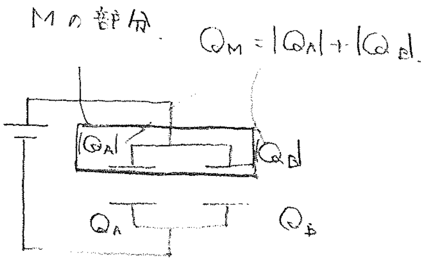
(c) 金属板挿入前の電気容量 C_0 は $C_0 = \epsilon_0 \frac{S}{5d}$ なので、この時蓄えられた電気量は Q_0 として $Q_0 = C_0 V_0 = \frac{\epsilon_0 S}{5d} V_0$.

$$\therefore\ \Delta Q = C V_0 - Q_0 = \frac{\epsilon_0 S}{4d} V_0 - \frac{\epsilon_0 S}{5d} V_0 = \frac{\epsilon_0 S}{20d} V_0$$

(d) ΔQ の電気量を V_0 の電位差の下で移動する仕事より

$W_p = V_0 \Delta Q = \frac{\epsilon_0 S}{20d} V_0^2$　また、$W_p + W_e = \frac{1}{2} C V_0^2 - \frac{1}{2} C_0 V_0^2$ が成り立つので $W_e = -\frac{\epsilon_0 S}{40d} V_0^2$

問(2) (a) この時の回路は(図2)の回路と等価。



(図2)

$$\therefore\ Q_A = -\frac{\epsilon_0 S}{3d} V_0, \quad Q_B = -\frac{\epsilon_0 S}{d} V_0, \quad Q_M = |Q_A| + |Q_B| = \frac{4\epsilon_0 S}{3d} V_0$$

(b) スイッチを開いているのでMの電気量は不変。

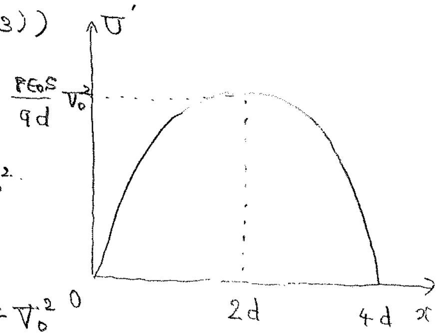
$C_A = \epsilon_0 \frac{S}{4d - x}$, $C_B = \epsilon_0 \frac{S}{x}$ より

並列接続の場合の合成電気容量の公式より合成電気容量を C' として

$$C' = C_A + C_B = \frac{4d\epsilon_0 S}{(4d - x)x} \quad \therefore\ U' = \frac{Q_M^2}{2C'} = \frac{2\epsilon_0 S}{9d^3} V_0^2 (4d - x)x$$

$U' = U'(x)$ と書く。$U'(x) = \frac{2\epsilon_0 S}{9d^3} V_0^2 \{-(x - 2d)^2 + 4d^2\}$

$\therefore\ x = 2d$ で $U'_m = \frac{8\epsilon_0 S}{9d} V_0^2$　(グラフは(図3))



(c) $W'_e = U'(2d) - U'(d) = \frac{2\epsilon_0 S}{9d} V_0^2$

(d) 静電エネルギーの変化は $\Delta U = U_{2d} - U_d = -\frac{\epsilon_0 S}{6d} V_0^2$.

電気量の変化は $\Delta Q = Q_M(2d) - Q_M(d) = -\frac{\epsilon_0 S}{3d} V_0$.

電池のした仕事は W'_p として $W'_p = V_0 \Delta Q = -\frac{\epsilon_0 S}{3d} V_0^2$

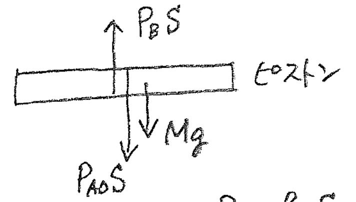
エネルギーと仕事の関係は $W'_p + W''_e = \Delta U$.

$$\therefore\ W''_e = \Delta U - W'_p = \frac{\epsilon_0 S}{6d} V_0^2$$

3

問(1) (a)　$PV = RT$　　$P_{A0} \times h_A S = RT_A$　　∴ $T_A = \frac{P_{A0} h_A S}{R}$

(b)



ピストンについての力のつり合いより

$P_B S = P_{A0} S + Mg$　　∴ $P_B = P_{A0} + \frac{Mg}{S}$

$PV = RT$ より　$P_B \times h_B S = RT_B$　∴ $T_B = \frac{P_B h_B S}{R} = \frac{h_B}{R}(P_{A0} S + Mg)$

問(2) (a) 空間Aについて、$PV = RT$ より

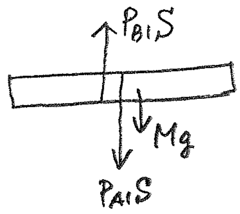
$P_{A1} \times (h_A - x) S = R T_{A1}$　　∴ $T_{A1} = \frac{P_{A1}(h_A - x)S}{R}$

熱力学第1法則 $\Delta U = Q + W$ において、$Q = 0$　∴ $W = \Delta U$

$\Delta U = C_V \Delta T = \frac{3}{2} R (T_{A1} - T_A)$ なので、

$W = \Delta U = \frac{3}{2} R \left(\frac{P_{A1} h_A S - P_{A1} x S}{R} - \frac{P_{A0} h_A S}{R} \right) = \frac{3}{2}\{(P_{A1} - P_{A0}) h_A - P_{A1} x\} S$

(b)



力のつり合いより　$P_{B1} S = P_{A1} S + Mg$　∴ $P_{B1} = P_{A1} + \frac{Mg}{S}$

空間Bについて、$PV = RT$ より　$P_{B1} \times (h_B + x) S = R T_{B1}$

∴ $T_{B1} = \frac{P_{B1}(h_B + x) S}{R} = \frac{(P_{A1} S + Mg)(h_B + x)}{R}$

$Q = \Delta U + W$ において、

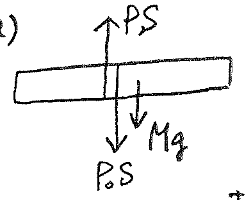
$\Delta U = \frac{3}{2} R \Delta T = \frac{3}{2} R (T_{B1} - T_B) = \frac{3}{2}\{(P_{A1} - P_{A0}) h_B S + (P_{A1} S + Mg) x\}$

W = (ピストンを持ち上げる仕事) + (空間Aの気体が受けた仕事)

$= Mgx + \frac{3}{2}\{(P_{A1} - P_{A0}) h_A - P_{A1} x\} S$

∴ $Q = \Delta U + W = \frac{3}{2}(P_{A1} - P_{A0})(h_A + h_B) S + \frac{5}{2} Mgx$

問(3) (a)



フタが外れているから、ピストンが上部から離れたとき、外気圧が P_0 なので、空間Bの圧力 P は、力のつり合いより、

$PS = P_0 S + Mg$　∴ $P = P_0 + \frac{Mg}{S}$

Bがされた仕事は、定圧変化であることから、$W = P\Delta V$ より

$W' = P \times h_A S = \left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right) \times h_A S = (P_0 S + Mg) h_A$

(b) 状態2の空間Bの温度 T_{B2} は、$PV = RT$ より

$\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right) \times (h_A + h_B) S = R T_{B2}$　　∴ $T_{B2} = \frac{(P_0 S + Mg)(h_A + h_B)}{R}$

状態3のBの温度 T_{B3} は、

$\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right) \times h_B S = R T_{B3}$　　∴ $T_{B3} = \frac{(P_0 S + Mg) h_B}{R}$

定圧変化なので、$Q = C_p \Delta T = \frac{5}{2} R \Delta T$ より、奪われた熱 Q' は

$Q' = \frac{5}{2} R (T_{B2} - T_{B3}) = \frac{5}{2} R \left\{ \frac{(P_0 S + Mg)(h_A + h_B)}{R} - \frac{(P_0 S + Mg) h_B}{R} \right\}$

∴ $Q' = \frac{5}{2}(P_0 S + Mg) h_A$